I. P. PROCOFIEV
PROFESOR DOCTOR ÎN ŞTIINŢE TEHNICE
A. F. SMIRNOV
DOCTOR ÎN ŞTIINŢE TEHNICE

STATICA CONSTRUCŢIILOR

VOL. III.

OFICIUL DE PRESĂ, EDITURĂ ŞI DOCUMENTARE CFR
1951

Scanned with OKEN Scanner

И. П. Прокофьев
Профессор, доктор технических наук
А. Ф. Смирнов
Профессор, доктор технических наук

ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ

ЧАСТЬ III

Утверждено Главным управлением учебными заведениями МПС в качестве учебника для втузов железнодорожного транспорта

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТРАНСПОРТНОЕ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Москва 1948

Scanned with OKEN Scanner

I. P. PROCOFIEV
DOCTOR IN ȘTIINȚE TEHNICE
A. F. SMIRNOV
DOCTOR IN ȘTIINȚE TEHNICE

STATICA CONSTRUCȚIILOR

VOL. III.

TRADUCERE DIN LIMBA RUSĂ

OFICIUL DE PRESA, EDITURĂ ȘI DOCUMENTARE CFR
1951

Scanned with OKEN Scanner

In lucrarea de față este expus în mod sistematic cursul de Statica Construcțiilor, întocmit în conformitate cu programul analitic al Facultăților de Construcții de pe lângă Institutele de Căi Ferate (din URSS) tratând însă și problemele stabilității și dinamicei construcțiilor.

Lucrarea este aprobată de Direcția Generală a Școlilor de pe lângă Ministerul de Comunicații (al URSS) ca manual pentru școlile superioare de căi ferate.

OFICIUL DE PRESĂ, EDITURĂ
ȘI DOCUMENTARE CFR

INVENTARIAT
la Nr. 23487/1951

Traducerea: Ing. Iuri Negruș
Verificarea tehnică: } Ing. Ion Beleș
Revizia editorială: }
Ediția I-a
Formatul B 5
Tiraj 3000 exemplare
Tipărit în Mai 1951 la Imprimeriile Cent. Pol. Nr. 7 — Filiala Satu-Mare
Clasificarea zecimală: 624.041

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚA

Desvoltarea continuă a construcțiilor în URSS și sporirea sarcinilor dinamice, cer dela inginerii proiectanți cunoștințele necesare, atât pentru efectuarea calculelor statice cât și a calculului construcțiilor la acțiunea sarcinilor dinamice precum și pentru calculul stabilității lor.

In acest domeniu au apărut în ultimii 30 de ani în URSS numeroase lucrări teoretice (lucrările lui S. A. Bernștein, N. I. Bezuhov, B. G. Galeorkin, A. N. Dinnik, K. S. Zavriev, A. I. Lurié, P. I. Karnauhov, I. M. Rabinovici, N. S. Streleţchi, N. K. Snitko și alții) și s'au efectuat un mare număr de cercetări experimentale, în special în domeniul calculului construcțiilor la acțiunea sarcinilor dinamice (lucrările ȚNII, MPS, ȚNIIPS, etc.)

In lucrarea de față, .constituind partea a treia a cursului de Statica Construcțiilor, sunt expuse bazele calculelor la acțiunea sarcinilor dinamice și ale calculului stabilității elementelor de construcții. Cuprinsul acestei lucrări este limitat de programul analitic, stabilit pentru Facultățile de Construcții ale Institutelor de Căi Ferate.

La expunerea chestiunilor teoretice, autorii au căutat să utilizeze metodele comune pentru toate domeniile staticii construcțiilor și anume: metoda forțelor, metoda deplasărilor, metoda parametrilor inițiali, etc. Autorii consideră că studenții și-au însușit aceste metode prin studierea capitolelor anterioare ale staticii construcțiilor, astfel încât aplicarea lor le va ușura studiul problemelor acțiunii sarcinilor dinamice și acelea ale stabilității.

Bineînțeles că în cadrul unui curs a cărui extindere este limitată de timpul rezervat predării materiei și pregătirii studenților, nu pot fi cuprinse toate problemele de stabilitate și de calcul la acțiunea sarcinilor dinamice. De aceea, autorii au urmărit, în primul rând, ca să lămurească pe deplin acele probleme ale staticii și dinamicii, care sunt neapărat necesare pentru inginerii constructori. Se poate remarca o particularitate a cursului de față, care constă în desvoltarea chestiunilor privitoare la determinarea eforturilor interioare și ale momentelor provocate de o încărcare producătoare de vibrații.

De asemenea sunt desvoltate și metodele de calcul pentru cadre, arce și grinzi cu zăbrele supuse la acțiunea sarcinilor dinamice.

In capitolul „Dinamica construcțiilor", autorii au omis intenționat studiul convoiului mobil și influențele provocate de șocurile acestui convoiu, întrucât această problemă nu este încă complet lămurită din punct de vedere teoretic și nu poate fi redată într'o formă accesibilă

pentru studenţi. De asemenea sunt omise calculele de stabilitate la acţiuni seismice, întrucât această chestiune prezintă un caracter special, iar inginerii specialişti pot să o studieze din lucrările prof. K. S. Zavriev.

In capitolul „Stabilitatea construcţiilor" autorii s'au mărginit la analiza stabilităţii în stadiul elastic al sistemelor alcătuite din bare drepte, cu toate că, în multe cazuri, pierderea stabilităţii se produce în zona plastică. Problema pierderii stabilităţii în zona plastică nu este încă bine definită din punct de vedere teoretic, fapt care împiedică expunerea ei sistematică în cadrul unui manual de curs.

Lucrarea de faţă conţine un număr considerabil de exemple şi de probleme care uşurează însuşirea cunoştinţelor teoretice.

Publicând acest tratat, autorii speră să primească din partea cititorilor observaţiile lor critice, care vor ajuta la îmbunătăţirea ediţiilor viitoare.

Incheind această expunere, autorii consideră ca o datorie de onoare să prezinte mulţumirile lor recenzorilor prof. S. A. Bernştein şi prof. K. S. Zavriev, care au formulat unele observaţii foarte preţioase, de asemenea profesorului V. A. Kiselev, docentului P. I. Polievschi precum şi aspiranţilor K. E. Kitaev, V. I. Sablin şi G. V. Fedorcov pentru munca ce au depus la prelucrarea textului şi rezolvarea exerciţiilor.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

In multe cazuri de proiectare a construcțiilor inginerești, stabilitatea construcției nu poate fi verificată numai prin calculele obișnuite de rezistență.

Faptul că solicitările, care sunt un criteriu al rezistenței materialului, nu depășesc valorile admisibile, nu ne îndrituește să afirmăm că construcția va rezista în bune condiții la sarcinile care o solicită. Pe lângă problema rezistențelor există și așa numita problemă a *stabilității construcției.*

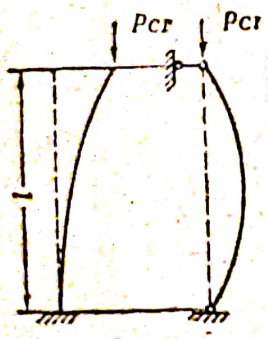


Fig. 1

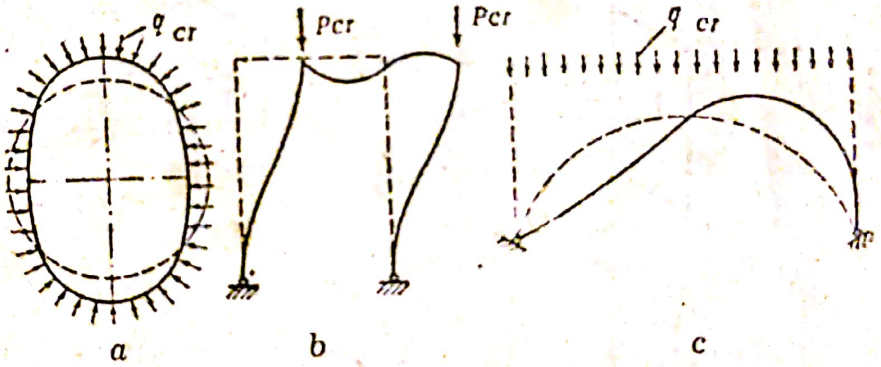


Fig. 2

Flambajul unei bare comprimate (fig. 1), care face parte din cursul de Rezistența materialelor, este cel mai simplu exemplu de pierdere a stabilității unei bare drepte, adică *pierderea stabilității sub acțiunea unei forțe axiale.*

Un inel închis (fig. 2 a) supus la o încărcare radială uniform distribuită (presiunea hidrostatică) se transformă într'o elipsă pentru o încărcare (presiune) corespunzătoare valorii critice q_{cr}, producându-se pierderea stabilității inelului.

Cadrul înfățișat în fig. 2 b, supus la acțiunea unei sarcini critice, își pierde stabilitatea și barele lui flambează.

Un arc parabolic, încărcat cu o sarcină uniform distribuită, are eforturi de compresiune în toate secțiunile[1]). Când valoarea încărcării devine critică, q_{cr}, această formă a arcului devine *nestabilă* și la defor-

[1]) Se neglijează momentele care apar din cauza acestei solicitări.

maţile date de către eforturile de compresiune, se adaugă şi o încovoiere, după cum se arată în fig. 2 c.

Cercetările au arătat că şi la alte feluri de solicitări se observă cazuri de pierdere a stabilităţii. De exemplu, la încovoierea unei grinzi cu secţiune dreptunghiulară subţire aşezată vertical şi încastrată la un capăt (fig. 3 a), sporind mereu sarcina P, grinda astfel solicitată îşi pierde la un moment dat stabilitatea.

Grinda deviază din planul vertical, producându-se o încovoiere în plan orizontal precum şi o torsiune. Acest fenomen se produce nu numai la grinzile cu secţiune dreptunghiulară subţire dar, de exemplu, şi la grinzile în I (fig. 3 b). Astfel, în afară de pierderea stabilităţii la bare supuse la solicitări axiale, se mai pot produce *pierderi de stabilitate şi în cazul încovoierii plane.*

In mod analog, poate avea loc şi pierderea stabilităţii în cazul torsiunii, compresiunii excentrice (al cărei efect este o încovoiere plană), acţiunii concomitente a compresiunii şi încovoierii, etc. Pierderea stabilităţii sub acţiunea oricărei solicitări se produce instantaneu şi, în general, provoacă alte deformaţii considerabile, precum şi redistribuirea solicitărilor interioare care uneori provoacă distrugerea construcţiei.

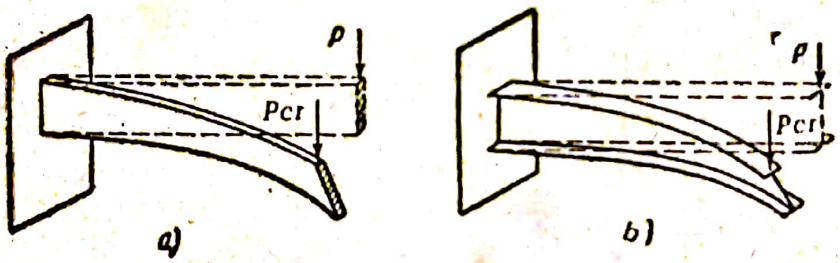


Fig. 3

Deteriorările care s'au întâmplat la construcţiile mari inginereşti s'au produs, în majoritatea cazurilor, din cauza lipsei de stabilitate a construcţiilor, iar nu din cauza lipsei de rezistenţă a elementelor din care construcţia era alcătuită. De aci rezultă că proiectarea construcţiilor trebue să se facă în aşa fel, încât să fie asigurate, atât rezistenţa cât şi stabilitatea construcţiei. Calculele de stabilitate constau în determinarea forţelor (sarcinilor) critice sau parametrilor acestor forţe şi se fac separat de calculele de rezistenţă, fiind deci un fel de calcule suplimentare şi de încheiere.

CAPITOLUL 1

FORȚELE CRITICE ȘI METODELE PENTRU DETERMINAREA LOR

§ 1. Pierderea stabilității, forța critică și parametrul critic

Flambajul unei bare drepte încărcată axial reprezintă cazul cel mai simplu de pierdere a stabilității.

Să presupunem că avem o bară ideală, dreaptă, de lungime mare, la care neglijăm greutatea proprie și care este alcătuită dintr'un material omogen: capătul inferior al acestei bare este încastrat, iar cel superior liber. Dacă la capătul liber vom aplica o sarcină P mereu crescândă, atunci, după condițiile de mai sus, bara își va păstra forma rectilinie la început, până când sarcina va atinge valoarea P_{cr}. Dacă această bară va fi deviată din poziția dreaptă și lăsată apoi liberă, ea va oscila, iar în urmă, din cauza rezistențelor, ea va reveni în poziția ei inițială de echilibru. Aceasta dovedește că bara este stabilă în poziția ei dreaptă și nu poate ocupa o altă poziție.

Insă această poziție a barei nu se va menține la oricare valoare a sarcinii P. Prin creșterea continuă a sarcinii P, aceasta va atinge o anumită valoare, la care o deviere cât de mică a barei va provoca curbarea axei sale și câteodată într'o măsură considerabilă.

Valoarea maximă a forței de compresiune aplicată axial, la care bara își păstrează forma dreaptă, se numește forța (sarcina) critică.

In fig. 4 sunt reprezentate axele deformate (fibrele medii deformate) ale unei bare subțiri, care s'au produs sub acțiunea unor forțe care depășeau forța critică cu 10, cu 39 și 120%.[1]) Din această figură rezultă că la depășirea forței critice, pe lângă solicitările provenite din compresiune, bara va mai avea și solicitări considerabile datorite încovoierii.

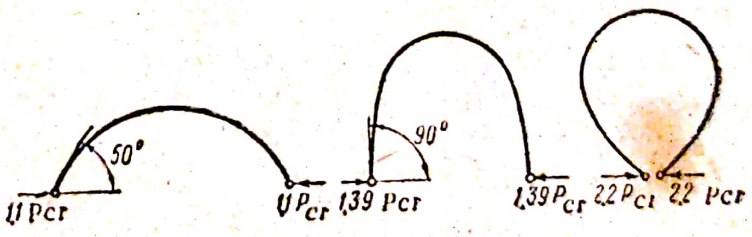


Fig. 4

[1]) Deplasările s'au determinat cu ajutorul ecuației diferențiale exacte a axei deformate:

$$\frac{M}{EI} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

La materiale fragile (casante), uneori, micile deformaţii ale axei barei sunt însoţite de ruperea barei. La materialele plastice, ca de exemplu la oţel, ruperea nu se produce şi dacă solicitarea materialului nu a depăşit limita de curgere, atunci, după îndepărtarea forţei, bara revine în poziţia ei iniţială. In cazul când forţa de compresiune depăşeşte forţa critică, poziţia dreaptă iniţială a axei barei devine nestabilă, iar poziţia stabilă va fi o formă curbă a axei. (fig. 5 a).

In cele ce urmează, vom arăta că una şi aceeaşi bară are mai multe valori ale forţelor critice. Astfel, pentru o bară articulată la ambele capete, după cum se cunoaşte din cursul de Rezistenţa materialelor, forţele critice se determină cu ajutorul următoarelor formule :

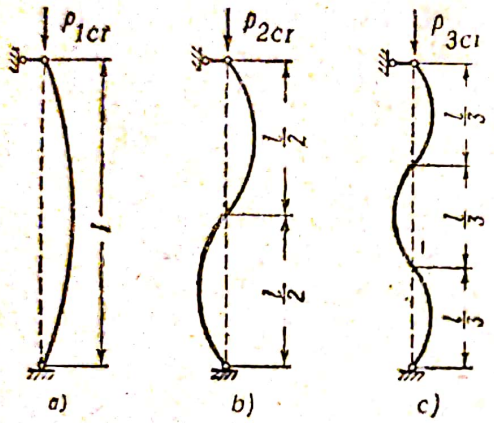


Fig. 5

$$P_{1\ cr} = \frac{\pi^2\ EI}{l^2};$$

$$P_{2\ cr} = \frac{4\ \pi^2\ EI}{l^2};$$

$$P_{3\ cr} = \frac{9\ \pi^2\ EI}{l^2};$$

. . . . . .

. . . . . .

$$P_{n\ cr} = \frac{(n\ \pi)^2\ EI}{l^2}$$

A doua şi a treia forţă critică corespund cu deformaţia axei reprezentată în fig. 5 b şi c ; însă aceste deformaţii sunt posibile numai teoretic, nu sunt stabile şi se transformă imediat în forma deformaţiei stabile, înfăţişată în fig. 5 a.

Starea barei la care se produce pierderea stabilităţii se numeşte *stare critică*. La o cât de mică reducere sau sporire a sarcinii, bara trece în starea de echilibru stabil, respectiv nestabil.

Echilibrul stabil sau nestabil se poate reprezenta considerând situaţia unei bile aşezată în interiorul unei sfere, pe un plan, sau deasupra unei sfere (fig. 6).

Dacă bila care se găseşte în interiorul sferei (fig. 6 a) va fi îndepărtată din poziţia de echilibru şi lăsată apoi liberă, ea îşi va ocupa din nou poziţia iniţială. Deci poziţia bilei în interiorul sferei este stabilă; la o cât de mică deplasare a bilei, energia ei potenţială creşte, deci la poziţia stabilă în fundul sferei corespunde minimum de energie potenţială.

Dacă aşezăm bila în punctul cel mai de sus, deasupra unei sfere (fig. 6 b), atunci la o deplasare cât de mică, bila nu mai poate să se întoarcă în poziţia ei iniţială, deci echilibrul va fi nestabil. La oricare deplasare a bilei, energia ei potenţială se micşorează ; de aceea la echilibrul nestabil, această energie are valoarea maximă. Când bila se gă-

seşte pe un plan (fig. 6 c) atunci la oricare deplasare a bilei, energia ei potenţială nu se schimbă, ceeace corespunde cu echilibrul indiferent.

Aşa dar, poziţia stabilă şi nestabilă a bilei se poate caracteriza prin mărirea sau micşorarea energiei potenţiale, constatată prin micile deplasări ale bilei.

In mod analog cu cele expuse mai sus, şi *barele sunt stabile atunci când au minimum de energie potenţială şi nestabile când au maximum.* Această regulă se foloseşte la rezolvarea problemelor de stabilitate ale sistemelor elastice cu ajutorul metodei energetice.

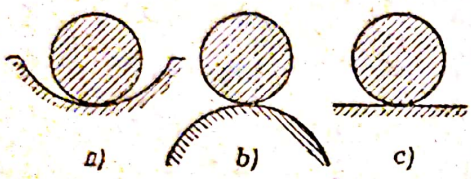


Fig. 6

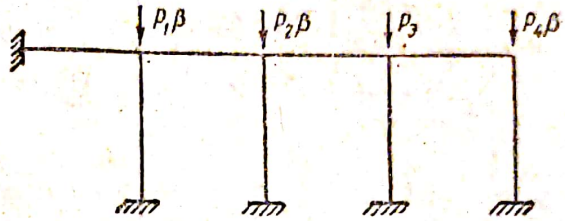


Fig. 7

Toate cele expuse mai sus relativ la stabilitatea sau nestabilitatea unei bare drepte solicitată axial, se extind şi asupra oricărei construcţii, ale cărei elemente sunt solicitate la compresiune.

Până acum ne-am ocupat de stabilitatea unei bare drepte încărcată cu o singură sarcină, pe care am caracterizat-o prin valoarea ei critică. Această caracterizare devine imposibilă atunci când o bară sau o construcţie este solicitată, astfel cum se arată de exemplu în fig. 7, unde un cadru este încărcat cu mai multe sarcini.

In acest caz, starea critică se caracterizează printr'un *parametru critic,* care reprezintă *coeficientul de siguranţă* al construcţiei *faţă de o anumită grupă de forţe.* De exemplu : trebue să stabilim coeficientul de siguranţă la stabilitate al cadrului reprezentat în fig. 7, faţă de sistemul de sarcini P_1, P_2 şi P_4. Inmulţind aceste sarcini cu β, trebue să găsim o astfel de valoare a parametrului β_{cr}, pentru care cadrul, fiind încărcat cu sarcinile $P_1\,\beta_{cr}$, $P_2\,\beta_{cr}$, P_3 şi $P_4\,\beta_{cr}$ se va găsi în stare de echilibru critic. La calculul de stabilitate nu este important să se determine sarcina critică totală, ci coeficientul de siguranţă la stabilitate, prin urmare parametrul critic.

§ 2. Metode pentru determinarea forţelor critice

Pentru determinarea forţelor critice există câteva metode, dintre care cele mai importante sunt : metoda statică şi cea energetică, pe care le vom analiza în primul rând.

1. Metoda statică

Metoda statică consideră *un sistem în echilibru elastic având o formă deformată care diferă prin deplasări infinitesimale de forma iniţială.* In cazul încovoierii produsă de deplasări infinitesimale se pot

folosi ecuații liniare diferențiale aproximative. Ecuațiile de echilibru, împreună cu condițiile limită din care se determină constantele de integrare, permit să alcătuim un sistem de *ecuații omogene*, în număr egal cu numărul constantelor necunoscute, care au apărut la integrarea acestor ecuații. Ecuațiile omogene se caracterizează prin particularitatea de a avea mai multe soluții. Una din aceste soluții, când toate constantele sunt egale cu zero, corespunde cu starea sistemului în poziție nedeformată.

Pentru a obține o altă stare deformată a sistemului este suficient ca constantele care intră în sistemul de ecuații de echilibru să fie diferite de zero. Această condiție va fi îndeplinită atunci când determinantul format din coeficienții α ai necunoscutelor, este egal cu zero:

$$D\ (\alpha) = 0 \tag{1}$$

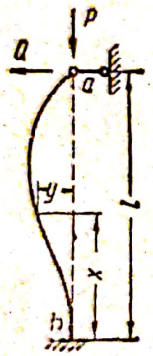


Fig. 8

Această ecuație este *ecuația caracteristică*, sau cum o vom denumi de acum înainte *ecuația de stabilitate*, din care vom determina valoarea *forței critice* P_{cr} (sau a parametrului critic β_{cr}).

Să urmărim aplicarea metodei statice în cazul unei bare supusă la compresiune, încastrată la un capăt și articulată la celălalt. (Fig. 8)

Momentul încovoietor într'o secțiune oarecare la distanța x, este egal cu:

$$M_x = -P \cdot y + Q\ (l - x)$$

în care Q este reacțiunea în articulația a.

Folosind ecuația diferențială a încovoierii:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M,$$

obținem:

$$EI\ y'' + Py = Q\ (l - x) \tag{2}$$

Integrala ecuației (2) va fi:

$$y = A \cos nx + B \sin nx + \frac{Q}{P}\ (l - x) \tag{3}$$

în care A și B sunt constantele de integrare,

iar

$$n = \sqrt{\frac{P}{EI}} \tag{4}$$

Ecuația (3) conține, astfel, trei valori necunoscute: A, B și $\frac{Q}{P}$; pentru determinarea lor avem trei condiții limită:

$$\left.\begin{aligned} &\text{când } x = 0, \quad y = 0 \quad \text{și} \quad y' = 0 \\ &\text{când } x = l, \quad y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Din aceste condiţii limită (5) şi din ecuaţia încovoierii (3) obţinem următorul sistem de ecuaţii omogene :

$$\left.\begin{aligned} &A + \frac{Q}{P} l = 0 \\ &A \cos nl + B \sin nl = 0 \\ &Bn - \frac{Q}{P} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Ecuaţiile (6) sunt satisfăcute când :

$$A = B = \frac{Q}{P} = 0$$

Acest caz corespunde cu cazul echilibrului stabil, întrucât conform expresiei (3) pentru valorile indicate ale lui A, B şi Q deformaţiile sunt nule, prin urmare bara rămâne dreaptă. Pe noi ne interesează însă echilibrul barei în stare deformată, deci cazul când constantele A, B şi Q sunt diferite de zero. Această stare este realizabilă numai atunci când determinantul sistemului de ecuaţii (6) este egal cu zero. Acestui caz îi corespund valorile nedefinite ale constantelor, ceea ce caracterizează starea de echilibru indiferent. Astfel ecuaţia de stabilitate va fi :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & l \\ \cos nl & \sin nl & 0 \\ 0 & n & -1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Rezolvând determinantul, obţinem :

$$\operatorname{tg} nl = nl. \qquad (7)$$

Din punct de vedere tehnic prezintă interes rădăcina cea mai mică, diferită de zero, a ecuaţiei (7).

Prin încercări găsim $nl = 4{,}493$. Utilizând expresia (4) obţinem forţa critică :

$$P_{cr} = 20{,}19 \frac{EI}{l^2} . \qquad (8)$$

In cazul când ecuaţia diferenţială a încovoierii nu se integrează în formă finită, rezolvarea se poate obţine sub forma seriilor infinite, însă forma ecuaţiei de stabilitate rămâne aceeaşi şi în acest caz.

2. Metoda energetică

In § 1 am expus criteriile energetice ale echilibrului stabil şi nestabil, aplicate la un corp solid. Am stabilit că la orice deplasare a unui corp solid din poziţia sa de echilibru stabil, corespunde o creştere a energiei sale potenţiale şi invers, micşorarea energiei potenţiale corespunde echilibrului nestabil. Aceleaşi criterii ale echilibrului stabil şi nestabil există şi în cazul corpurilor elastice.

Dacă la o deplasare cât de mică a unei bare din poziţia ei de echilibru iniţial energia potenţială creşte, bara va fi în stare de echilibru

Scanned with OKEN Scanner

stabil. Din contră, la micşorarea energiei potenţiale, echilibrul va fi nestabil.

Starea critică va corespunde deci cazului când energia potenţială rămâne constantă pentru deplasări infinitesimale din poziţia iniţială de echilibru. Dacă în locul energiei potenţiale însăşi, vom considera variaţiile ei la trecerea dintr'o poziţie de echilibru în alta, atunci poziţia critică se determină din condiţia

$$\Delta V = 0$$

La variaţia energiei potenţiale, care se produce la trecerea dintr'o formă de echilibru în alta, ΔV se va compune din două valori:

1) Variaţia energiei potenţiale a încărcării, care este egală cu lucrul mecanic al forţelor exterioare:

$$T = \sum (X \delta_x + Y \delta_y + Z \delta_z) \qquad (9)$$

în care X, Y şi Z sunt proiecţiile forţelor pe axele de coordonate;

δ_x, δ_y şi δ_z, — deplasările punctelor de aplicaţie ale forţelor în direcţia axelor de coordonate.

2) Variaţia energiei potenţiale a eforturilor interioare U.

Prin urmare, condiţiile stării critice vor fi exprimate prin următoarea ecuaţie:

$$\Delta V = U - T = 0 \qquad (10)$$

sau

$$U = T \qquad (11)$$

Ecuaţia obţinută este ecuaţia de stabilitate pentru un sistem elastic; din această ecuaţie se obţin forţele critice.

Desavantajul metodei energetice constă în necesitatea de a ne închipui deformaţia posibilă a sistemului în momentul pierderii stabilităţii.

Intrucât deformaţia reală a sistemului nu ne este cunoscută, trebue să admitem o deformaţie aproximativă, de aceea şi această metodă se numeşte aproximativă. Trebue să remarcăm că prin metoda energetică se obţin, în general, valori mai mari ale forţelor critice, ceea ce se explică prin faptul că forma admisă pentru deformaţii diferă întotdeauna de cea reală. Aceasta este echivalent cu aplicarea asupra sistemului dat a unor legături suplimentare, făcându-l astfel mai rigid decât este în realitate. Cu cât deformaţiile admise se apropie mai mult de cele reale, cu atât valoarea forţei critice va fi mai exactă.

Să examinăm acum aplicarea acestei metode în cazul unei bare drepte, articulată la ambele capete (fig. 9). Variaţia energiei potenţiale a eforturilor interioare va fi egală cu energia potenţială a încovoierii:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx,$$

însă, după cum se ştie,

$$\frac{M}{EI} = y''$$

deci:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 \, dx. \tag{12}$$

Variaţia energiei potenţiale a încărcării, adică lucrul mecanic al forţei P pe deplasarea δ este egal cu:

$$T = P \, \delta$$

Valoarea deplasării δ poate fi determinată ca diferenţa între lungimea l şi proiecţia coardei barei pe axa iniţială a barei. Proiecţia elementului ds pe axa barei este egală cu:

$$ds \cos \tau = dx$$

Prin urmare

$$ds - dx = ds \, (1 - \cos \tau) = dx \, \frac{1 - \cos \tau}{\cos \tau}.$$

τ fiind unghiul de înclinare al tangentei în secţiunea la distanţa x.

Pentru curbele pleoştite se poate admite:

$$dx \, \frac{1-\cos \tau}{\cos \tau} = dx \, \frac{2 \sin^2 \frac{\tau}{2}}{\cos \tau} \approx 2 \, dx \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \approx \frac{dx}{2} \operatorname{tg}^2 \tau = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Prin urmare:

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 \, dx$$

iar lucrul mecanic va fi:

$$T = \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 \, dx. \tag{13}$$

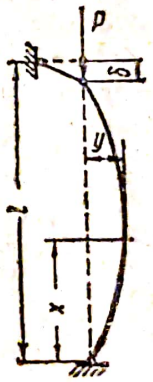


Fig. 9

Substituind în ecuaţia de stabilitate (11), valorile lui U şi T date de expresiile (12) şi (13) obţinem:

$$P_{cr} = \frac{\int_0^l (y'')^2 \, dx}{\int_0^l (y')^2 \, dx} \, EI. \tag{14}$$

Formula (14) este aplicabilă pentru toate barele cu secţiunea constantă, indiferent de modalitatea de fixare a extremităţilor. Pentru cazul reprezentat în fig. 9, vom alege următoarea ecuaţie a axei deformate:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Atunci

$$\int_0^l (y'')^2\,dx = f^2\,\frac{\pi^4}{l^4}\int_0^l \left(\sin\frac{\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{f^2}{2}\,\frac{\pi^4}{l^3}$$

și

$$\int_0^l (y')^2\,dx = f^2\,\frac{\pi^2}{l^2}\int_0^l \left(\cos\frac{\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{f^2}{2}\,\frac{\pi^2}{l}\,.$$

Substituirea valorilor obținute în formula (14) ne dă:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2\,EI}{l^2}\,.$$

Am obținut valoarea exactă a forței critice întrucât axa deformată a barei a fost exprimată prin ecuația sinusoidei, adică prin curba care corespunde cu forma reală a axei deformate. Dacă în locul sinusoidei vom alege o curbă oarecare, care satisface condițiile limită:

$$y\,(l) = y\,(0) = 0 \text{ și } y_1''\,(l) = y''\,(0) = 0$$

vom obține o valoare aproximativă a forței critice.

O valoare apropiată de valoarea exactă a forței critice se obține în cazul când deformația axei barei se consideră produsă de o încărcare oarecare, de exemplu uniform distribuită pe toată lungimea barei. Această curbă va îndeplini automat toate condițiile limită.

Dintre desavantajele metodei energetice este imposibilitatea de a determina gradul de precizie al unei forțe critice, calculată în mod aproximativ.

S. P. Timoshenko a indicat pentru aceste calcule aplicarea metodei aproximațiilor succesive, după care se pot constata, cu oarecare aproximație, erorile rezultatelor obținute, comparând rezultatele aproximațiilor succesive. Să analizăm această metodă aplicată la calculul unei bare încastrată la capătul inferior (fig. 10).

Alegem pentru axa deformată următoarea ecuație:

$$y = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots\ldots + a_n x^{2n} \qquad (15)$$

Fig. 10

Limitându-ne la început numai la primii trei termeni ai seriei (15) și satisfăcând condițiile limită

$$y\,(0) = y'\,(0) = 0\,;\; y\,(l) \neq 0$$

$$y'\,(l) \neq 0\,;\; y''\,(l) = \frac{M_e}{EI} = 0\,*$$

obținem:

$$a_0 = 0\,;\; a_2 = -\frac{a_1}{6\,l^2}$$

Atunci

$$y = a_1\left(x^2 - \frac{x^4}{6\,l^2}\right) \qquad (16)$$

* Remarcăm că în cazul când curba admisă îndeplinește primele trei condiții limită și nu satisface pe a patra $y''\,(l) = 0$, eroarea la determinarea forței critice poate atinge 30%. Asemenea cazuri dau naștere la unele păreri greșite când se consideră că metoda energetică poate să dea erori foarte mari. Deci, la rezolvarea problemelor cu această metodă, trebue să alegem întotdeauna astfel de curbe care să satisfacă toate condițiile limită.

Scanned with OKEN Scanner

Substituind expresia (16) în formula (14) și integrând, obținem :

$$P_{cr} = \frac{42}{17}\frac{EI}{l^2} = 2{,}4706\,\frac{EI}{l^2}$$

$\left(\text{valoarea precisă este } 2{,}4674\,\frac{EI}{l^2}\text{ ; eroarea este de } 0{,}13\%\right)$.

A doua aproximație se poate obține considerând primii patru termeni ai seriei. Pentru a satisface condițiile limită trebue să admitem că :

$$y = a\left(x^2 - \frac{x^4}{6\,l^2}\right) + b\left(x^2 - \frac{x^6}{15\,l^4}\right) \qquad (17)$$

Substituirea expresiei (17) în formula (14) ne dă :

$$P_{cr} = \frac{EI}{l^2}\,\frac{42}{17}\,\frac{1 + \frac{16}{7}z + \frac{4}{3}z^2}{1 + \frac{348}{153}z + \frac{404}{935}z^2}$$

în care

$$z = \frac{b}{a}$$

Pentru ca să determinăm valoarea minimă a forței critice P_{cr}, folosim următoarea condiție :

$$\frac{dP}{dz} = 0,$$

care ne conduce la o ecuație de gradul al doilea :

$$z^2 = 1{,}0623\,z + 0{,}1604 = 0$$

Rădăcinile acestei ecuații sunt $z_1 = -\,0{,}1822$ și $z_2 = -\,0{,}8802$,
Forței critice minime îi corespunde rădăcina $z = -\,0{,}1822$.
Atunci

$$P_{cr} = 2{,}4674\,\frac{EI}{l^2}$$

Primele patru cifre ale acestui rezultat coincid cu valoarea exactă a forței critice.

Comparând valorile forțelor critice obținute la prima și la a doua aproximație, observăm că diferența între aceste valori este infimă, ceea ce ne permite (însă nu în toate cazurile), ca să ne dăm seama că rezultatul dat de a doua aproximație este destul de precis.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 2

STABILITATEA BARELOR DREPTE

§ 3. Cele cinci cazuri de fixare a capetelor unei bare drepte

In fig. 11 sunt reprezentate cele cinci cazuri de fixare a capetelor unei bare. Cazurile I, II și IV sunt cunoscute din cursul de Rezistența materialelor. Cazul III este examinat în § 2, unde am obținut forța critică

$$P_{cr} = 20{,}19 \frac{EI}{l^2}$$

In cazul V, când ambele extremități ale barei sunt încastrate, însă încastrările au posibilitatea de deplasare liberă (fără rotiri) vom avea:

$$M = P(\delta - y) - m$$
$$EI\, y'' + Py = P\delta - m \qquad (18)$$

în care δ este deplasarea capătului superior;

m — momentul în secțiunea de încastrare superioară.

Integrala ecuației (18) este:

$$y = A \cos nx + B \sin nx + \delta - \frac{m}{P} \qquad (19)$$

Din condiția $y'(0) = 0$, rezultă $B = 0$. Din a doua condiție limită $y'(l) = 0$, obținem:

$$-An \sin nl = 0$$

ceea ce ne conduce la ecuația caracteristică:

$$\sin nl = 0$$

Forței critice minime îi corespunde rădăcina:

$$nl = \pi$$

de unde

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Cele cinci cazuri de fixare ale capetelor barei, înfățișate în fig. 11, precum și valorile forțelor critice respective ne vor servi, de acum înainte, pentru orientare și ne vor ajuta la aprecierea forțelor critice pentru alte cazuri.

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că în toate cazurile de mai sus, forța critică poate fi reprezentată sub următoarea formă:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

l_0 este denumită *lungimea de flambaj* $l_0 = \mu l$, iar μ este coeficientul lungimii de flambaj. In sens geometric l_0 reprezintă lungimea semi-undei sinusoidei.

In fig. 11 sunt indicate lungimile l_0 precum și relația lor cu lungimea de calcul a barei. Deci coeficienții lungimii de flambaj pentru cele cinci cazuri vor avea următoarele valori (în ordinea numerotării cazurilor): 2; 1; 0,7; 0,5; 1.

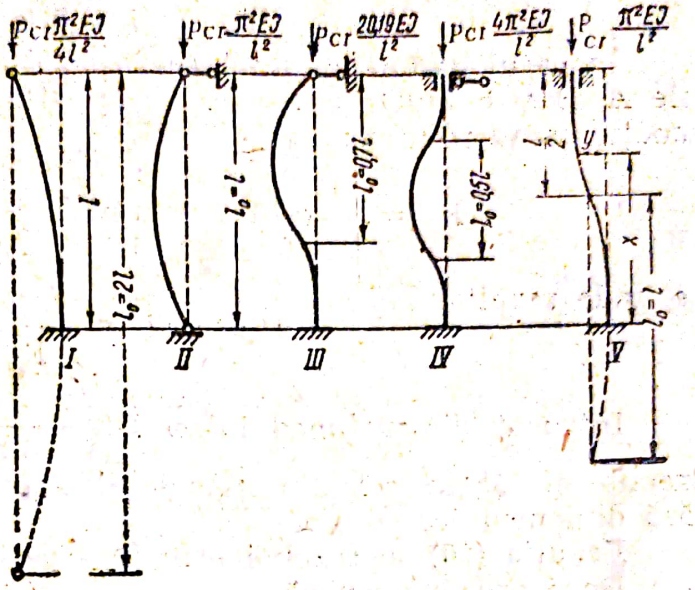


Fig. 11

§ 4. Stabilitatea barelor cu extremitățile încastrate elastic

In afară de barele cu capetele încastrate rigid sau simplu rezemate, se mai întâlnesc în construcții și bare cu capetele încastrate elastic. Să analizăm câteva cazuri tipice de asemenea bare.

1) Fig. 12 a înfățișează o bară cu încastrare elastică la capătul inferior și cu capătul superior liber. Acest caz este asemănător cu acela reprezentat în fig. 11, I. Elasticitatea încastrării se caracterizează prin valoarea unghiului de rotire $\bar{\varphi}$ produs de un moment unitar $M = 1$.

Momentul încovoietor în secțiunea situată la distanța x este:

$$M = P(\delta - y)$$

Ecuația diferențială a echilibrului precum și integrala ei sunt:

$$EI\, y'' + Py = P\,\delta$$

$$y = A \cos nx + B \sin nx + \delta$$

în care

$$n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

Condițiile limită vor fi:

când $x = 0$; $y = 0$ și $y' = P\delta\bar{\varphi}$;
când $x = l$: $y = \delta$

Satisfăcând aceste condiții, vom obține:

$$A + \delta = 0;$$

$$A \cos nl + B \sin nl + \delta = \delta;$$

$$Bn = P\,\delta\,\bar{\varphi}$$

Scanned with OKEN Scanner

Transformând ultima ecuație prin substituirea valorii $P = n^2 EI$, vom obține trei ecuații liniare:

$$A + \delta = 0;$$
$$A \cos nl + B \sin nl = 0;$$
$$B - n EI\bar{\varphi}\,\delta = 0.$$

In cazul de față ne interesează rezultatul obținut atunci când valorile A, B și δ sunt diferite de zero; astfel încât vom avea următoarea ecuație caracteristică:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cos nl & \sin nl & 0 \\ 0 & 1 & -nEI\bar{\varphi} \end{vmatrix} = 0$$

de unde rezultă:

$$nl \cdot \operatorname{tg} nl = \frac{l}{EI\,\bar{\varphi}} \qquad (20)$$

Intrucât dimensiunea lui $\bar{\varphi}$ este $\frac{1}{\text{tm}}$, atât în membrul din dreapta cât și în cel din stânga al ecuației (20) se găsește o valoare fără dimensiuni.

Ecuația (20) se rezolvă prin încercări.

Dacă presupunem că

$$\frac{l}{EI\,\bar{\varphi}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

și

$$nl = z$$

atunci ecuația (20) se va scrie sub următoarea formă

$$\operatorname{ctg} z = z \operatorname{tg}\alpha = \beta \qquad (21)$$

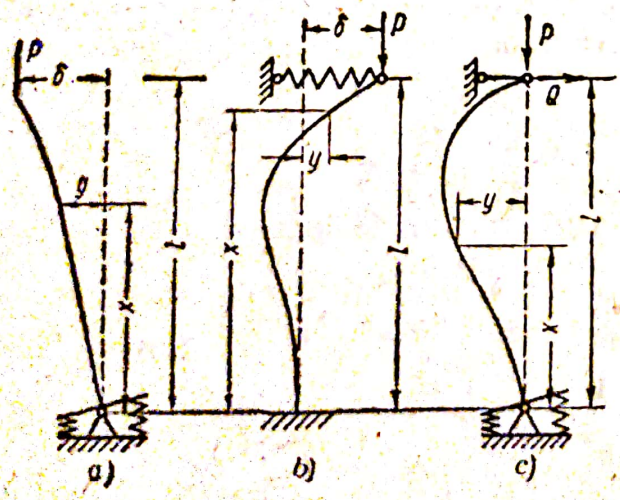


Fig. 12

și poate fi rezolvată pe cale grafică prin reprezentarea curbelor în coordonatele β și z după cum se arată în fig. 13.

Din această diagramă rezultă că valoarea lui z este întotdeauna mai mică decât $\frac{\pi}{2}$, deci forța critică în cazul de față este și ea întotdeauna inferioară lui $\frac{\pi^2 EI}{4\,l^2}$, adică mai mică decât forța critică din cazul I, fig. 11. Numai în cazul limită, când $\bar{\varphi} = 0$, adică la o încastrare rigidă, vom obține din condiția (21) și din diagrama reprezentată în fig. 13:

$$\operatorname{ctg} z = 0;$$

$$z = \frac{\pi}{2}$$

de unde

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}$$

Pentru cazuri intermediare, cunoscând valoarea lui $z = nl$, forțele critice se pot determina foarte ușor.

2) Bara este încastrată rigid la extremitatea inferioară și rezemată elastic la extremitatea superioară (fig. 12 b).

Momentul încovoietor în secțiunea la distanța x este

$$M = P(\delta - y) - \bar{c}\,\delta\,(l - x)$$

în care $\bar{c}$ este efortul în resort corespunzător lungirii lui egală cu unitatea (rigiditatea resortului).

Ecuația diferențială a echilibrului precum și integrala ei sunt:

$$EI\,y'' + Py = P\,\delta - \bar{c}\,\delta\,(l-x)$$

$$y = A\cos nx + B\sin nx + \delta\left[1 - \frac{\bar{c}}{P}(l-x)\right]$$

Substituind condițiile limită ale sistemului:

când $x = 0$; $y = 0$ și $y' = 0$

când $x = l$; $y = \delta$

obținem:

$$A + \delta\left(1 - \frac{\bar{c}l}{P}\right) = 0$$

$$\cos nl + B\sin nl + \delta = \delta$$

$$Bn + \frac{\bar{c}}{P}\delta = 0$$

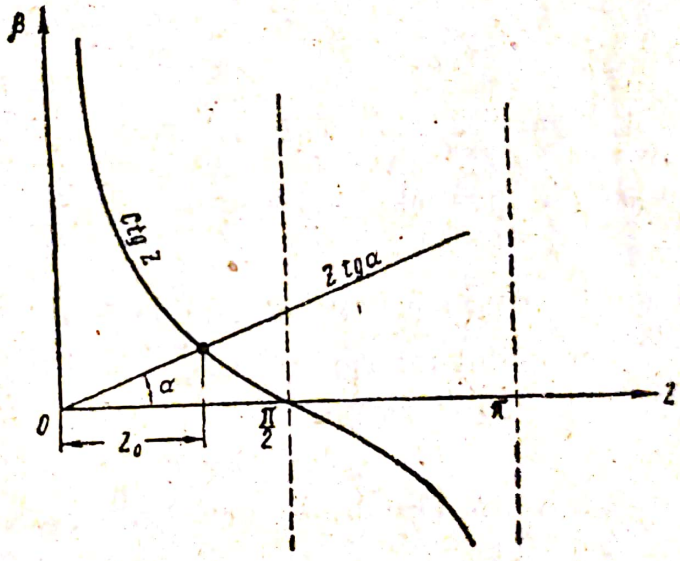


Fig. 13

Ținând seamă că $\frac{\bar{c}}{P} = \frac{\bar{c}}{n^2 EI}$ putem să scriem următoarea ecuație caracteristică:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \left(1 - \frac{\bar{c}l}{n^2 EI}\right) \\ \cos nl & \sin nl & 0 \\ 0 & n & \frac{\bar{c}}{n^2 EI} \end{vmatrix} = 0,$$

de unde

$$\frac{\bar{c}}{n^2 EI}\sin nl + n\cos nl\left(1 - \frac{\bar{c}l}{n^2 EI}\right) = 0$$

sau, după transformare

$$\operatorname{tg} nl = nl - \frac{(nl)^3 \, EI}{l^3 \bar{c}}. \tag{22}$$

Pentru rezolvarea ecuației (22) se poate construi o diagramă asemănătoare cu aceea reprezentată în fig. 13. In acest caz, linia tangentelor intersectează curba construită după ecuația algebrică în raport cu argumentul nl.

$$f(nl) = (nl) - \frac{EI}{l^3 \bar{c}} (nl)^3$$

în următoarele limite

$$\frac{\pi}{2} < nl < \frac{3}{2} \pi.$$

Pentru două cazuri particulare $\bar{c} = 0$ și $\bar{c} = \infty$, ecuația (22) ne dă aceleași valori pe care le-am obținut pentru bara încastrată la un capăt și liberă la celălalt, precum și pentru bara încastrată la un capăt și articulată la celălalt. Intradevăr, când $\bar{c} = 0$, rezultă din ecuația (22) :

$$\operatorname{tg} nl = \infty,$$

de unde

$$nl = \frac{\pi}{2} \text{ și } P_{cr} = \frac{\pi^2 \, EI}{4l^2}$$

iar când $\bar{c} = \infty$, ecuația (22) se transformă astfel :

$$\operatorname{tg} nl = nl,$$

care coincide cu ecuația (7) obținută la § 2.

3) Capătul inferior al barei este încastrat elastic, iar cel superior este articulat. In acest caz (fig. 12 c) avem :

$$M = - Py - Q (l - x) \tag{23}$$

iar ecuația diferențială a echilibrului precum și intregrala ei sunt :

$$EI \, y'' + Py = - Q (l - x) ;$$

$$y = A \cos nx + B \sin nx - \frac{Q}{P} (l - x). \tag{24}$$

Condițiile limită vor fi :

când $x = 0$; $y = 0$ și $y' = \bar{\varphi} M_3$;
când $x = l$; $y = 0$

în care $M_3 = - Ql$ este momentul de încastrare, iar $\bar{\varphi}$ are aceeași valoare ca și în cazul 1.

Introducând condițiile limită în ecuația (24) obținem :

$$A - \frac{Q}{P} l = 0 ;$$

$$A \cos nl + B \sin nl = 0 ;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$Bn + \frac{Q}{P} = -\bar{\varphi}\, Ql = -\bar{\varphi}\, \frac{Q}{P}\, Pl .$$

Având în vedere că $Pl = n^2 l\, EI$, se poate scrie următoarea ecuație caracteristică :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -l \\ \cos nl & \sin nl & 0 \\ 0 & n & (1 + \bar{\varphi}\, n^2 l\, EI) \end{vmatrix} = 0 ,$$

de unde rezultă :

$$\operatorname{tg} nl = nl \, \frac{1}{1 + (nl)^2 \, \frac{EI\, \bar{\varphi}}{l}} \qquad (25)$$

Când $\bar{\varphi} = 0$ (cazul unei încastrări rigide) ecuația (25) ia forma următoare :

$$\operatorname{tg} nl = nl$$

adică are aceeași formă ca și ecuația (7), dedusă pentru o bară încastrată la un capăt și articulată la celălalt.

Când $\bar{\varphi} = \infty$ (cazul unei rezemări articulate), din ecuația (25) rezultă :

$$\sin nl = 0 ,$$

ceea ce corespunde cu formula pentru o bară articulată la ambele capete.

Din cele trei cazuri examinate mai sus rezultă că procedeele pentru rezolvarea problemelor de stabilitate ale barelor cu capetele încastrate elastic, rămân aceleași ca și în cazurile obișnuite de fixare ale capetelor.

Diferența constă numai în determinarea condițiilor limită, pentru fiecare caz în parte, ceea ce, de altfel, nu prezintă nici o dificultate.

§ 5. Acțiunea simultană a mai multor forțe

Vom examina mai întâi cazul când asupra unei bare, având un capăt încastrat și celălalt liber, acționează două forțe, după cum se arată în fig. 14. Momentele încovoietoare și ecuațiile diferențiale ale echilibrului pentru ambele porțiuni (de lungime l_1 și l_2) au următoarea expresie :

— pentru prima porțiune :

$$M_1 = P_1 (\delta_1 - y_1) ;$$
$$EIy''_1 + P_1 y_1 = P_1 \delta_1 ;$$

— pentru a doua porțiune :

$$M_2 = P_1 (\delta_1 - y_2) + P_2 (\delta_2 - y_2) ;$$
$$EI\, y''_2 + (P_1 + P_2)\, y_2 = P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 .$$

Integralele acestor ecuații sunt următoarele :

$$y_1 = A_1 \sin n_1 x + A_2 \cos n_1 x + \delta_1 ; \qquad (26)$$

$$y_2 = B_1 \sin n_2 x + B_2 \cos n_2 x + \frac{P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2}{P_1 + P_2} . \qquad (27)$$

în care

$$n_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EI}} \; ; \qquad n_2 = \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EI}} \tag{28}$$

Stabilim următoarele condiții limită :

1) când $x = 0$; $y'_2 = 0$
2) când $x = l$; $y_1 = \delta_1$
3) când $x = l_2$; $y'_1 = y'_2$
4) când $x = l_2$; $y''_1 = y''_2$

Din prima condiție limită și din ecuația (27) obținem

$$n_2 B_1 \cos 0 + n_2 B_2 \sin 0 = 0$$

Prin urmare

$$B_1 = 0$$

Din a doua condiție limită și ecuația (26) avem

$$A_1 \sin n_1 l + A_2 \cos n_1 l = 0$$

Din a treia și a patra condiție și din ecuațiile (26) și (27) obținem :

$$A n_1 \cos n_1 l_2 - A_2 n_1 \sin n_1 l_2 = - B_2 n_2 \sin n_2 l_2$$
$$- A_1 n_1^2 \sin n_1 l_2 - A_2 n_1^2 \cos n_1 l_2 = - B_2 n_2^2 \cos n_2 l_2$$

A_1, A_2 și B_2 vor fi egali cu zero, atunci când următoarea condiție va fi satisfăcută

$$D = \begin{vmatrix} \sin n_1 l & \cos n_1 l & 0 \\ n_1 \cos n_1 l_2 & - n_1 \sin n_1 l_2 & n_2 \sin n_2 l_2 \\ - n_1^2 \sin n_1 l_2 & - n_1^2 \cos n_1 l_2 & n_2^2 \cos n_2 l_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin n_1 l & \cos n_1 l & 0 \\ \cos n_1 l_2 & - \sin n_1 l_2 & \frac{n_2}{n_1} \sin n_2 l_2 \\ - \sin n_1 l_2 & - \cos n_1 l_2 & \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos n_2 l_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{29}$$

de unde, după reducere cu $\frac{n_2}{n_1}$ în ultima coloană, obținem

$$\frac{n_2}{n_1} \sin n_1 l \cdot \sin n_1 l_2 \cdot \cos n_2 l_2 + \cos n_1 l \cdot \sin n_2 l_2 \cdot \sin n_1 l_2 -$$

$$- \sin n_1 l \cdot \sin n_2 l_2 \cdot \cos n_1 l_2 + \frac{n_2}{n_1} \cos n_1 l \cdot \cos n_2 l_2 \cdot \cos n_1 l_2 = 0$$

sau

$$\frac{n_2}{n_1} \cos n_2 l_2 (\sin n_1 l \cdot \sin n_1 l_2 + \cos n_1 l \cdot \cos n_1 l_2) =$$
$$= \sin n_2 l_2 (\sin n_1 l \cdot \cos n_1 l_2 - \cos n_1 l \cdot \sin n_1 l_2)$$

Scanned with OKEN Scanner

De aci, după transformări, obținem :

$$\operatorname{tg} n_1 l_1 \cdot \operatorname{tg} n_2 l_2 = \frac{n_2}{n_1}. \tag{30}$$

Rezolvarea acestei ecuații este posibilă numai pentru raporturile date $\frac{P_2}{P_1}$ și $\frac{l_2}{l_1}$.

Vom examina acum exemplul numeric reprezentat în fig. 15, admițând că

$$l_1 = l_2 = \frac{1}{2} l$$

și

$$P_2 = 3 P_1 .$$

Fig. 14

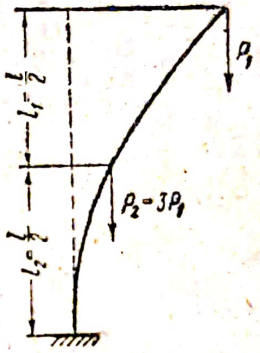


Fig. 15

Din formulele (28) obținem :

$$n_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EI}} = n ;$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EI}} = \sqrt{\frac{P_1 + 3P_1}{EI}} = 2\sqrt{\frac{P_1}{EI}} = 2n$$

Notăm

$$\frac{nl}{2} = z .$$

Substituirea acestei expresii în ecuația (30) ne dă ecuația de stabilitate :

$$\operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} 2z = 2 \tag{31}$$

Inlocuind

$$\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}$$

după simplificare, obținem :

$$\operatorname{tg} z = 0{,}707. \tag{32}$$

Prin urmare, $z \approx 0{,}615$; sau $\frac{nl}{2} = 0{,}615$ și $nl = 1{,}23$.

Apoi găsim

$$P_{1cr} = \frac{1{,}23^2\, EI}{l^2} = \frac{1{,}513\, EI}{l^2};$$

$$P_{2cr} = 3 \cdot P_{1cr} = \frac{4{,}539\, EI}{l^2}.$$

In cazul de față ecuația (31) s'a transformat ușor în forma mai simplă a ecuației (32). In general însă, ecuațiile de stabilitate asemănătoare cu ecuația (30) se rezolvă prin încercări.

Ne întoarcem acum la ecuația (30) și examinăm un caz particular când $P_2 = 0$.

Vom obține:

$$n_1 = n_2 = n \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} nl_1 \cdot \operatorname{tg} nl_2 = 1;$$

punând $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$, avem

$$\operatorname{tg} \frac{nl}{2} = 1;$$

$$\frac{nl}{2} = \frac{\pi}{4}$$

și

$$P_{cr} = \frac{\pi^2\, EI}{4\, l^2}.$$

Când $P_1 = 0$, obținem:

$$\operatorname{tg} n_2 l_2 = \infty$$

$$n_2 l_2 = \frac{\pi}{2}$$

și

$$P_{cr} = \frac{\pi^2\, EI}{4\, l_2^2}$$

ceea ce era și de așteptat.

In cazul când asupra barei acționează mai mult de două forțe, problema devine mai complicată, întrucât numărul ecuațiilor omogene se sporește cu 2 pentru fiecare forță nouă, prin urmare și gradul determinantului va crește tot în același raport.

In cazul unui număr mare de forțe concentrate, se folosesc de obiceiu metode aproximative.

Dintre aceste metode aproximative face parte și o metodă destul de simplă, propusă de prof. A. P. Korobov, care dă rezultate deajuns de precise pentru bare încastrate la un capăt.

Vom examina două cazuri de încărcare a unei bare (fig. 16). In primul caz forța critică va fi egală cu

$$P_{cr} = \frac{\pi^2\, EI}{4\, l_1^2}$$

iar în al doilea:

$$Q_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}.$$

Este evident că putem să scriem și următoarea ecuație:

$$Q_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 l_1^2} \cdot \frac{l_1^2}{l^2} = P_{cr} \left(\frac{l_1}{l}\right)^2$$

Dacă vom considera că ambele cazuri sunt identice în ce privește stabilitatea, putem să deducem că forța critică aplicată la capătul de sus este mai mică decât aceea care acționează la distanța l_1 și anume în raportul $\left(\frac{l_1}{l}\right)^2$. De aceea, dacă se dă o forță care acționează la o înălțime oarecare, putem să o transferăm la capătul de sus, micșorând-o în raportul $\left(\frac{l^1}{l}\right)^2$.

Extinzând această regulă pentru cazul acțiunii mai multor forțe și transferând toate aceste forțe la capătul superior al barei, vom obține o singură forță convențională Q (fig. 17) a cărei valoare este dată de expresia:

$$Q_{cr} = \left[P_1 \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + P_2 \left(\frac{l_2}{l}\right)^2 + \ldots + P_n \left(\frac{l_n}{l}\right)^2 \right] \lambda_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2},$$

în care λ_{cr} este parametrul critic al grupei forțelor date, care în acest caz este

$$\lambda_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2 \sum_{i=1}^{n} P_i \left(\frac{l_i}{l}\right)^2}. \qquad (33)$$

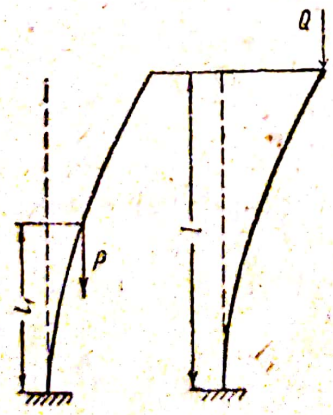


Fig. 16

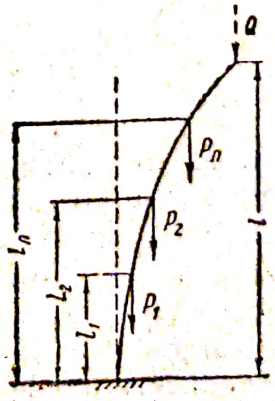


Fig. 17

Eroarea care rezultă din aplicarea acestei metode este în funcție de distribuția sarcinilor și variază între 2% și 10%.

Să aplicăm metoda lui Korobov la problema rezolvată mai înainte prin metoda analitică (fig. 15).

Cu ajutorul formulei (33) determinăm parametrul critic :

$$\lambda_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2 \sum_{i=1}^{2} P_i \left(\frac{l_i}{l}\right)^2} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2 \left[P_1 + \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 P_2\right]}$$

In cazul de față $l_1 = \frac{1}{2} l$ și $P_2 = 3 P_1$

După substituire obținem :

$$\lambda_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2 \left(P_1 + \frac{1}{4} 3 P_1\right)} = \frac{\pi^2 EI}{7 l^2 P_1}.$$

Prin urmare forțele P_1 și P_2, corespunzătoare stării critice, au respectiv următoarele valori :

$$P_{1cr} = P_1 \lambda_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{7 l^2} = 1{,}41 \frac{EI}{l^2}$$

$$P_{2cr} = P_2 \lambda_{cr} = 3P_1 \lambda_{cr} = 4{,}23 \frac{EI}{l^2}.$$

Comparând aceste rezultate cu acelea obținute mai înainte, găsim că diferența față de rezultatele exacte este

$$\frac{1{,}513 - 1{,}41}{1{,}513} \cdot 100 = 6{,}8\%$$

§ 6. Stabilitatea unei bare verticale sub acțiunea greutății proprii

Vom examina influența greutății proprii asupra stabilității unei bare, încastrată la capătul inferior.

Luând derivata ecuației diferențiale a fibrei medii deformate

$$EIy'' = -M,$$

obținem :

$$EIy''' = -\frac{dM}{dx} = -Q$$

Forța tăietoare într'o bară supusă la încovoiere sub acțiunea greutății proprii (fig. 18) se determină cu ajutorul expresiei :

$$Q = (l-x)\, q \sin \varphi \approx (l-x)\, q \operatorname{tg} \varphi = (l-x)\, qy'.$$

Egalând ambele expresii ale forței tăietoare, obținem ecuația diferențială a echilibrului :

$$EIy''' + (l-x)\, qy' = 0. \qquad (34)$$

Prin o substituire specială, această ecuație se aduce la forma ecuației lui Bessel și se rezolvă cu ajutorul funcțiunii lui Bessel.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, greutatea critică a barei, determinată după tablourile funcțiunii lui Bessel, este egală cu:

$$(ql)_{cr} = \frac{7{,}83\ EI}{l^2} = \frac{\pi^2\ EI}{(1{,}122l)^2}. \qquad (35)$$

Problema stabilității unei bare sub acțiunea greutății proprii se poate rezolva aproximativ și cu metoda energetică, pornind dela următoarea relație:

$$U = T.$$

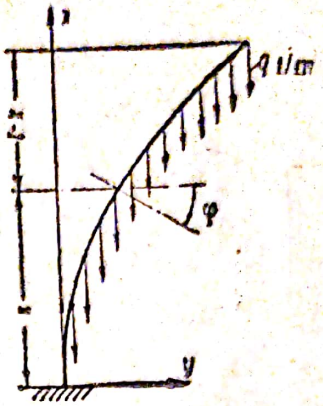


Fig. 18

După cum se știe

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx = \frac{EI}{2}\int_0^l (y'')^2\,dx. \qquad (36)$$

Din fig. 19 rezultă că la înclinarea y'_x a unui element dx, toată încărcarea $(l-x)\ q$ care se găsește mai sus decât acest element va efectua lucrul mecanic pe deplasarea $\frac{1}{2}(y')^2\,dx$, prin urmare

$$dT = \frac{1}{2}q\ (l-x)\ (y')^2\ dx$$

de unde

$$T = \frac{q}{2}\int_0^l (l-x)\ (y')^2\ dx. \qquad (37)$$

Egalând expresiile (36) și (37) obținem:

$$(ql)_{cr} = \frac{\int_0^l (y'')^2.\ dx}{\int_0^l (l-x)(y')^2\,dx}.\ lEI. \qquad (38)$$

Prin alegerea unei curbe care corespunde condițiilor limită și făcând substituirea în ecuația (38), obținem valoarea aproximativă a sarcinii critice.

De exemplu, alegem următoarea ecuație pentru axa deformată:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots + a_nx^n.$$

Ne mărginim la primii cinci termeni ai acestei serii.

Din condițiile de egalitate cu zero a unghiului de rotire, a deformației și a forței tăietoare în secțiunea de încastrare, obținem:

$$a_0 = a_1 = a_3 = 0$$

Ecuația axei deformate va lua astfel următorul aspect:

$$y = a_2x^2 + a_4x^4 \tag{39}$$

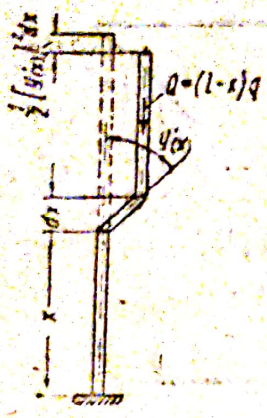


Fig. 19

Din egalitatea cu zero a momentului dela capătul superior al barei, se poate stabili relația între constantele a_2 și a_4, eliminând astfel una din ele. Substituind apoi ecuația obținută în expresia (38) se poate determina greutatea critică a barei. Aplicarea unei asemenea metode pentru rezolvarea acestei probleme provoacă însă o eroare considerabilă, întrucât ecuația (39), pe care am admis-o pentru axa deformată, diferă mult de ecuația ei reală. Pentru rezolvarea acestor probleme, S. P. Timoshenko a indicat o altă metodă pe care o vom examina în cele ce urmează, aplicând-o la rezolvarea exemplului de mai sus.

Păstrând ambele constante în ecuația (39) obținem:

$$y' = 2a_2x + 4a_4x^3$$
$$y'' = 2a_2 + 12a_4x^2$$

calculăm apoi integrala

$$\int_0^l (y'')^2dx = \int_0^l (2a_2 + 12a_4x^2)^2\ dx =$$

$$= 4a_2^2l + 48a_2a_4\frac{l^3}{3} + 144a_4^2\frac{l^5}{5}$$

Introducând notația

$$\frac{a_4}{a_2}l^2 = z$$

obținem

$$\int_0^l (y'')^2dx = 4a_2^2\,l\left(1 + 4z + \frac{36}{5}z^2\right).$$

Mai departe găsim:

$$\int_0^l (l-x)\,y'^2\,dx = \int_0^l (l-x)\cdot(2a_2x + 4a_4x^3)^2\,dx =$$

$$= 4a^2l^4\left(\frac{1}{12} + \frac{2}{15}z + \frac{1}{14}z^2\right).$$

Substituirea ne dă:

$$(ql)_{cr} = \frac{EI}{l^2}\cdot\frac{1 + 4z + \frac{36}{5}z^2}{\frac{1}{12} + \frac{2}{15}z + \frac{1}{14}z^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel greutatea critică a barei depinde de alegerea valorii lui z. Din condiția ca valoarea lui $(ql)_{cr}$ să fie minimă:

$$\frac{d}{dz}(ql)_{cr} = 0$$

se obține următoarea ecuație pentru determinarea lui z:

$$\frac{118}{175} z^2 + \frac{37}{35} z + \frac{1}{5} = 0$$

Rădăcinile acestei ecuații sunt:

$$z_1 = -0{,}22 \quad \text{și} \quad z_2 = -1{,}35$$

Substituind valoarea lui z_1 în formula greutății critice, obținem:

$$(ql)_{cr} = \frac{8{,}15\ EI}{l^2} = \frac{\pi^2\ EI}{(1{,}10\ l)^2}$$

Comparând cu rezultatul exact se constată că metoda energetică dă o precizie suficientă. In cazul de față diferența este mai mică decât 2 %.

Pentru determinarea greutății critice a unui stâlp încastrat la extremitatea inferioară se poate folosi metoda aproximativă a prof. A. P. Korobov, a cărei desvoltare pentru cazul unei sarcini de compresiune, distribuită după o lege oarecare, a fost făcută de către prof. N. M. Mitropolski.

In fig. 20 a este reprezentată o bară încărcată cu o sarcină distribuită de compresiune, a cărei diagramă este înfățișată în fig. 20 c. Inlocuind forța elementară $q(x) \cdot dx$, aplicată în secțiunea la distanța x (fig. 20 a) cu forța dQ, aplicată la capătul de sus al barei și utilizând metoda lui A. P. Korobov, obținem:

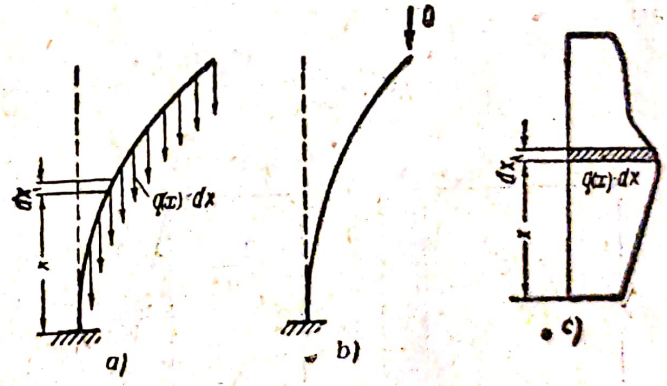


Fig. 20

$$dQ = \left(\frac{x}{l}\right)^2 q(x)\ dx$$

Transferând toate forțele elementare la capătul de sus al stâlpului, obținem (fig. 20 b):

$$Q = \frac{1}{l^2} \int_0^l x^2 q(x)\ dx \qquad \text{(a)}$$

Examinând fig. 20 c observăm că

$$q(x)\ dx = dF$$

în care F este suprafața diagramei sarcinii distribuite de compresiune. Valoarea integralei din formula (a) reprezintă astfel valoarea momen-

tului de inerție I_0 al diagramei sarcinilor de compresiune în raport cu axa orizontală dusă prin secțiunea de încastrare. Putem deci să scriem:

$$Q = \frac{1}{l^2} I_0$$

iar

$$Q_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}$$

Prin urmare, rezultă următoarea relație:

$$\frac{1}{l^2} I_{0cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2} \qquad (b)$$

Ecuația de stabilitate (b) permite să determinăm sarcina critică pentru diferite cazuri de încărcare. Astfel pentru cazul calculului la greutatea proprie (fig. 21 b) momentul de inerție al diagramei de încărcare este egal cu:

$$I_0 = \frac{ql^3}{3}$$

Substituirea în ecuația (b) ne dă

$$\frac{1}{l^2} \frac{q_{cr} l^3}{3} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2},$$

de unde:

$$(ql)_{cr} = \frac{3}{4} \pi^2 \frac{EI}{l^2},$$

sau

$$(ql)_{cr} = \frac{7{,}40\ EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(1{,}155\ l)^2};$$

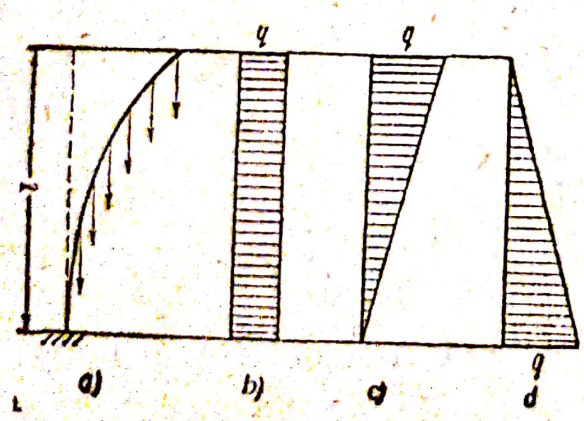


Fig. 21

diferența față de valoarea exactă (35) este de 5,5 %.

In cazul când încărcarea este distribuită după un triunghiu (fig.21 c), avem:

$$\frac{1}{l^2} \frac{ql^3}{4} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}$$

de unde

$$\left(\frac{ql}{2}\right)_{cr} = \frac{\frac{\pi^2}{2} EI}{l^2} = \frac{4{,}93\ EI}{l^2}$$

Pentru acest caz prof. F. S. Iasinschi a obținut următorul rezultat exact:

$$\left(\frac{ql}{2}\right)_{cr} = 5{,}12 \frac{EI}{l^2}$$

Diferența este de 3 %.

Scanned with OKEN Scanner

In cazul unei sarcini distribuite după legea indicată în fig. 21 d, acad. A. N. Dinnik a determinat următoarea valoare:

$$\left(\frac{ql}{2}\right)_{cr} = 16{,}1\ \frac{EI}{l^2}$$

Metoda aproximativă pentru același caz dă următorul rezultat:

$$\frac{1}{l^2}\ \frac{ql^3}{12} = \frac{\pi^2\ EI}{4l^2}$$

de unde

$$\left(\frac{ql}{2}\right)_{cr} = \frac{3}{2}\ \frac{\pi^2\ EI}{l^2} = 14{,}8\ \frac{EI}{l^2}$$

diferența este de 8 %.

Cu cât partea principală a încărcării este mai aproape de secțiunea de încastrare, cu atât eroarea dată de calculul aproximativ este mai mare.

§ 7. Stabilitatea barelor cu secțiune variabilă

La numeroase construcții se folosesc bare a căror secțiune transversală variază în lungul barei după o lege oarecare. Rezolvarea exactă a stabilității unor asemenea bare cere de cele mai multe ori integrarea unor ecuații diferențiale cu coeficienți variabili, ceea ce provoacă uneori dificultăți foarte mari. De aceea, examinând în cele ce urmează o serie de asemenea probleme — ne mărginim în unele cazuri să indicăm numai rezultatul.

1) Bare cu variația bruscă (în trepte) a rigidității

In fig. 22 este reprezentată o bară având în partea superioară rigiditatea EI_1, iar în cea inferioară rigiditatea EI_2.

Ecuația diferențială a încovoierii pentru fiecare porțiune (treaptă) precum și integralele lor sunt:

$$EI_1 y''_1 + Py_1 = \delta P;$$
$$EI_2 y''_2 + Py_2 = \delta P$$
$$y_1 = A_1 \sin n_1 x + A_2 \cos n_1 x + \delta$$
$$y_2 = B_1 \sin n_2 x + B_2 \cos n_2 x + \delta$$

în care

$$n_1 = \sqrt{\frac{P}{EI_1}};$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{P}{EI_2}}$$

Din următoarele condiții limită :

$$\text{când } x_2 = 0, \quad y'_2 = 0; \quad \text{când } x = l, \quad y_1 = \delta$$
$$\text{când } x = l_2, \quad y'_1 (l_2) = y'_2 (l_2)$$

și

$$y''_1 (l_2) = \frac{EI_2}{EI_1} y''_2 (l_2) = \frac{n_1^2}{n_2^2} y''_2 (l_2)$$

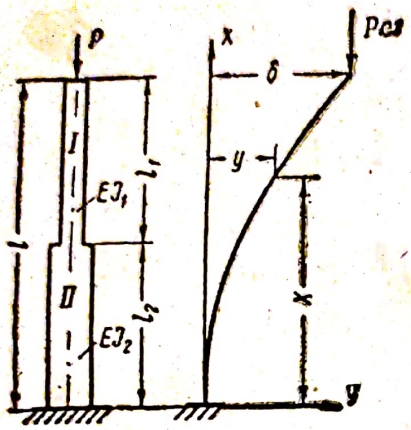


Fig. 22

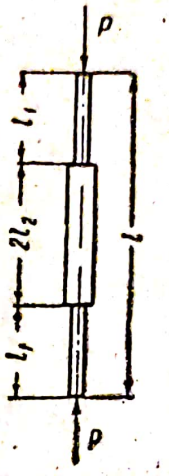


Fig. 23

obținem :

$$B_1 = 0$$
$$A_1 \sin n_1 l + A_2 \cos n_1 l = 0;$$
$$A_1 n_1 \cos n_1 l_2 - A_2 n_1 \sin n_1 l_2 + B_2 n_2 \sin n_2 l_2 = 0$$
$$A_1 \sin n_1 l_2 + A_2 \cos n_1 l_2 - B_2 \cos n_2 l_2 = 0,$$

iar ecuația caracteristică este :

$$D = \begin{vmatrix} \sin n_1 l & \cos n_1 l & 0 \\ \cos n_1 l_2 & -\sin n_1 l_2 & \frac{n_2}{n_1} \sin n_2 l_2 \\ \sin n_1 l_2 & \cos n_1 l_2 & -\cos n_2 l_2 \end{vmatrix} = 0$$

Rezolvând determinantul, obținem

$$\operatorname{tg} n_1 l_1 \cdot \operatorname{tg} n_2 l_2 = \frac{n_1}{n_2} \qquad (40)$$

Această ecuație se poate rezolva folosind și numai raporturile $\frac{EI_1}{EI_2}$ și $\frac{l_2}{l_1}$ date [după cum și ecuația (30) se rezolvă cu raporturile $\frac{P_2}{P_1}$ și $\frac{l_2}{l_1}$ date].

Ecuația (40) servește totodată și pentru calculul barei înfățișată în fig. 23, introducând notațiile astfel cum sunt indicate în figură.

In cazul a două sarcini: P_1 aplicată sus și P_2 aplicată la nivelul treptei, avem:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg} n_1 l_1 \cdot \operatorname{tg} n_2 l_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{P_1 + P_2}{P_1}; \\ &n_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EI_1}}; \quad n_2 = \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EI_2}} \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Să determinăm acum valoarea forței critice pentru bara reprezentată în fig. 24. Forța P în acest caz este un parametru în funcție de care se exprimă grupa celorlalte forțe. Din formulele (41) găsim:

$$n_1 = \sqrt{\frac{P}{EI_1}} = n; \quad n_2 = \sqrt{\frac{P+5P}{EI_2}} = \sqrt{\frac{6P}{1{,}5\ EI_1}} = 2n;$$

$$l_1 n_1 = \frac{2l}{3} n = z;$$

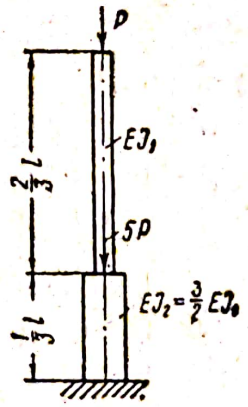


Fig. 24

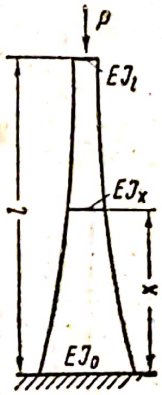


Fig. 25

$$l_2 n_2 = \frac{1}{3} l\ 2n = \frac{2l}{3}\ n = z$$

Ecuația de stabilitate (41) va căpăta forma

$$\operatorname{tg}^2 z = 3$$

din care obținem

$$\operatorname{tg} z = \sqrt{3} \text{ și } z = \frac{\pi}{3}$$

Prin urmare avem ecuația

$$\frac{2}{3} l \sqrt{\frac{P}{EI_1}} = \frac{\pi}{3}$$

de unde determinăm forța critică

$$P_{cr} = \frac{\pi^2\ EI_1}{4\ l^2}.$$

2) Bară cu variaţia continuă a rigidităţii

Vom analiza o bară a cărei rigiditate variază după o lege continuă (fig. 25) :

$$EI_x = EI_0 \left(1 + b\frac{x}{l}\right)^m \tag{42}$$

La diferite valori ale lui m, bara va căpăta diferite forme. Ecuaţia diferenţială a axei deformate a unei asemenea bare este

$$EI_0 \left(1 + b\frac{x}{l}\right)^m y'' + Py = 0$$

şi se poate rezolva cu ajutorul funcţiilor elementare numai în două cazuri şi anume: când $m = 2$ şi $m = 4$. Pentru construcţii, aceste două cazuri prezintă un interes deosebit. Momentele de inerţie ale stâlpului cu zăbreluţe (fig. 26 a) şi ale stâlpului piramidal (fig. 26 b) variază după o lege care corespunde cu valorile $m = 2$ şi $m = 4$.

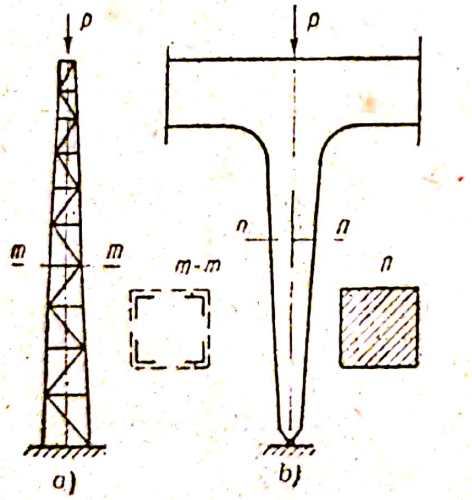


Fig. 26

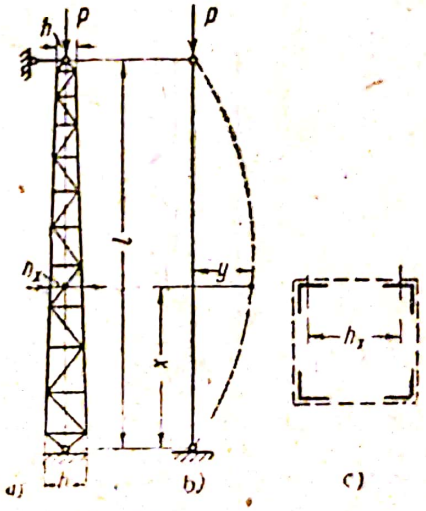


Fig. 27

Să examinăm stabilitatea stâlpului cu zăbreluţe ($m = 2$) în ipoteza că ambele capete sunt articulate (fig. 27 a). Momentul de inerţie pentru secţiunea transversală reprezentată în fig. 27 c, poate fi stabilit aproximativ cu ajutorul formulei

$$I_x = 4F\left(\frac{h_x}{2}\right)^2 = Fh_x^2, \tag{43}$$

în care F este suprafaţa secţiunii transversale a unei corniere.

$$h_x = h_0 - \frac{h_0 - h}{l}x = h_0\left[1 - \left(1 - \frac{h}{h_0}\right)\frac{x}{l}\right].$$

Inmulțind termenii ecuației (43) cu E și introducând valoarea lui h_x precum și raportul $\frac{h}{h_0} = \alpha$ obținem

$$EI_x = EI_0 \left[1 - (1 - \alpha) \frac{x}{l} \right]^2$$

în care $I_0 = Fh_0^2$

Această lege de variație a rigidității corespunde cu ecuația (42) când $m = 2$. Ecuația diferențială a axei deformate va fi:

$$EI_0 \left[1 - (1 - \alpha) \frac{x}{l} \right]^2 y'' + Py = 0. \tag{44}$$

Notăm

$$\left[1 - (1 - \alpha) \frac{x}{l} \right] = u$$

și substituind în ecuația (44) obținem:

$$EI_0 u^2 y'' + Py = 0.$$

Această ecuație diferențială conține un coeficient variabil pe lângă y''. In multe cazuri, asemenea ecuații se rezolvă, fie cu ajutorul unor funcțiuni speciale (de exemplu funcțiunile lui Bessel), fie prin integrare numerică. In cazul de față, când $m = 2$ (și după cum se va arăta mai jos și pentru cazul când $m = 4$), ecuația diferențială se poate rezolva și cu ajutorul funcțiilor elementare.

Pentru cazul de față, prezentăm rezolvarea obținută de către acad. A. N. Dinnik:

$$y = \sqrt{u} \, [A \cos (\beta \ln u) + B \sin (\beta \ln u)],$$

în care

$$\beta = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI_0 (1 - \alpha)^2} - \frac{1}{4}}. \tag{45}$$

Condițiile limită:

când $x = 0$; $(u = 1)$ $y = 0$
când $x = l$; $(u = \alpha)$ $y = 0$

ne dau:

$$A = 0$$

$$B \sqrt{\alpha} \sin (\beta \ln \alpha) = 0$$

de unde obținem ecuația caracteristică:

$$\sin (\beta \ln \alpha) = 0$$

ceea ce este posibil atunci când

$$\beta \ln \alpha = \pi, \; 2\pi, \; \ldots\ldots \; n\pi.$$

Scanned with OKEN Scanner

La valoarea minimă a forței critice corespunde $\beta \ln \alpha = \pi$, astfel încât găsim:

$$P_{cr} = K \frac{EI_0}{l^2}, \tag{46}$$

în care

$$K = \left[\left(\frac{\pi}{\ln \alpha} \right)^2 + \frac{1}{4} \right] (1 - \alpha)^2. \tag{47}$$

Ecuația (46) poate fi exprimată în aceeași formă după cum se face și în Rezistența materialelor:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

Atunci coeficientul lungimii de flambaj pentru bara dată va fi egal cu:

$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{K}}$$

In cazul unei bare simetrice, reprezentată în fig. 28, valoarea forței critice se determină cu ajutorul următoarei formule:

$$P_{cr} = \frac{(1 + 4\beta^2)\ (1 - k^2)^2}{4 \left(1 - \frac{\lambda}{l}\right)^2} \frac{EI}{l^2} = K \frac{EI}{l^2}.$$

în care

$$k = \sqrt[4]{\frac{I_0}{I}};$$

I^0 și I — sunt respectiv momentul de inerție minim și maxim,
λ și l — dimensiunile indicate în fig. 28

β — are semnificația anterioară, cu deosebirea că în loc de l în formula (45) trebue să substituim

$$l_1 = \frac{l - \lambda}{2}$$

In fig. 29 este înfățișată o bară cu secțiune dreptunghiulară plină, la care laturile h_x și b_x variază după aceeași lege.

$$h_x = h_0 \left[1 - (1 - \alpha) \frac{x}{l} \right]$$

și

$$b_x = b_0 \left[1 - (1 - \alpha) \frac{x}{l} \right]$$

In aceste expresii

$$\alpha = \frac{h}{h_0} = \frac{b}{b_0}$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentul de inerţie al secţiunii la distanţa x este

$$I_x = \frac{b_x\, h_x^3}{12} = I_0 \left[1 - (1-\alpha)\frac{x}{l} \right]^4, \qquad (48)$$

adică variază după legea exprimată prin ecuaţia (42) pentru $m = 4$

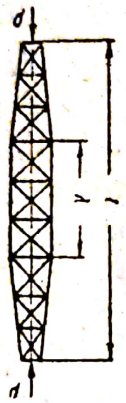


Fig. 28

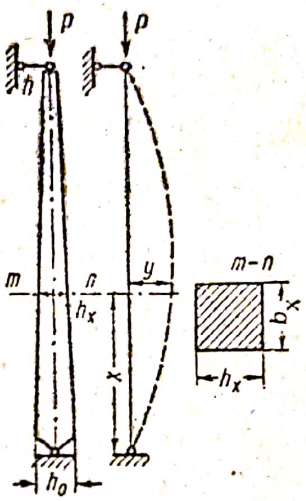


Fig. 29

Ecuaţia diferenţială a încovoierii unei asemenea bare este următoarea:

$$EI_0 \left[1 - (1-\alpha)\frac{x}{l} \right]^4 y'' + Py = 0$$

După indicaţiile date de acad. A. N. Dinnik, integrala acestei ecuaţii se scrie sub forma următoare:

$$y = \frac{1}{u}(A \cos u + B \sin u)$$

în care

$$u = \frac{\sqrt{K}}{1-\alpha} \frac{1}{1-(1-\alpha)\frac{x}{l}};$$

$$K = \frac{Pl^2}{EI}$$

Condiţiile limită

când $x = 0$; $y = 0$ şi când $x = l$; $y = 0$

ne dau ecuaţiile omogene:

$$A \cos u_0 + B \sin u_0 = 0$$
$$A \cos u_1 + B \sin u_1 = 0$$

în care

$$u_0 = \frac{\sqrt{K}}{1-\alpha}; \qquad u_1 = \frac{\sqrt{K}}{\alpha(1-\alpha)}$$

Din ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} \cos u_0 & \sin u_0 \\ \cos u_1 & \sin u_1 \end{vmatrix} = 0$$

rezultă următoarea egalitate :

$$\sin (u_1 - u_0) = \sin \left(\frac{\sqrt{K}}{\alpha} \right) = 0$$

Prima rădăcină a acestei ecuații

$$\frac{\sqrt{K}}{\alpha} = \pi$$

ne permite să scriem expresia pentru forța critică :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \alpha^2 EI}{l^2}$$

Când momentul de inerție variază după o funcțiune exponențială cu puteri exprimate printr'un număr fără soț ($m = 1$; $m = 3$, etc.), rezolvarea ecuației diferențiale a axei deformate este posibilă numai cu ajutorul funcțiunilor lui Bessel.

Cazurile de variație a momentului de inerție după o funcțiune cu puteri m fără soț, se întâlnesc însă foarte rar în practica construcțiilor, astfel încât nu le vom examina aci.

Pentru barele înfățișate în fig. 30, la care variația momentului de inerție spre extremități urmează aceeași lege (48), valoarea sarcinii critice se exprimă prin formula :

$$P_{cr} = \frac{K EI}{l^2} \qquad (49)$$

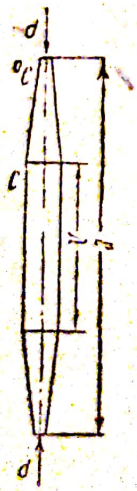


Fig. 30

Valoarea coeficientului K se determină din următoarea expresie :

$$K = \frac{\left(1 - \frac{I_0}{I}\right) U}{1 - \frac{\lambda}{l}}$$

iar valoarea lui u, corespunzătoare dimensiunilor și rigidității date, se calculează cu ajutorul ecuației transcendente :

$$\operatorname{tg} \left[\frac{\left(1 - \frac{I_0}{I}\right) U}{1 - \frac{\lambda}{l}} \cdot \frac{\lambda}{l} \right] + \operatorname{ctg} \left(\frac{1 - \frac{I_0}{I}}{\frac{I_0}{I}} \right) U = \frac{1}{U}$$

Pentru ușurarea calculelor tuturor felurilor de bare indicate mai sus, s'au întocmit tabele.[1])

[1]) A. N. Dinnik. „Flambajul" 1939.

§ 8. Influenţa slăbirilor locale ale secţiunii asupra valorii forţei critice

In construcţii se întrebuinţează foarte des bare comprimate cu slăbiri locale ale secţiunii ; de exemplu : chertări la construcţii de lemn, găuri pentru nituri la construcţii metalice, etc. Deci, se naşte întrebarea în ce fel aceste slăbiri locale influenţează asupra valorii forţei critice.

Această chestiune este lămurită prin lucrările acad. A. N. Dinnik[1]) care a propus o metodă destul de simplă pentru calculul barelor cu secţiunea având slăbiri locale. Considerând o bară cu rigiditatea EI_x care diferă foarte puţin de rigiditatea EI_o a unei bare cu secţiunea constantă, se poate admite că

$$EI_x = EI_o + \Delta EI_x$$

în care ΔEI_x este o valoare infinit mică în raport cu EI_o.

Pornind dela această condiţie, acad. A. N. Dinnik a obţinut următoarea valoare a forţei critice :

a) pentru o bară articulată la ambele capete :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}\left[1 + \frac{2}{l}\int_0^l \frac{\Delta I_x}{I_o}\sin^2\frac{\pi x}{l}\,dx\right] = P_1(1+\alpha) \qquad (50)$$

în care

$$P_1 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

b) pentru o bară încastrată la capătul inferior şi liberă la cel superior :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}\left[1 + \frac{2}{l}\int_0^l \frac{\Delta I_x}{I_o}\cos^2\frac{\pi x}{2l}\,dx\right] \qquad (51)$$

Cu ajutorul ecuaţiilor (50) şi (51) se poate stabili influenţa slăbirilor locale ale secţiunii.

Să examinăm, de exemplu, stabilitatea unei bare slăbite prin chertare (fig. 31 a). Rigiditatea barei în fiecare dintre cele trei porţiuni este constantă : în prima şi a treia portiune, $\Delta I_x = 0$, iar în a doua $\Delta I_x = I_I - I_{II} = -\Delta I$, care este o valoare constantă.

In cazul de faţă

$$\alpha = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{\Delta I_x}{I_o}\sin^2\frac{\pi x}{l}\,dx = -\frac{2\Delta I}{l I_o}\int_c^{c+d}\sin^2\frac{\pi x}{l}\,dx$$

[1]) A. N. Dinnik. „Flambajul" 1939, pag. 143.

având în vedere că

$$\int \sin^2 \frac{\pi x}{l}\, dx = \frac{l}{\pi}\left(\frac{\pi x}{2l} - \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi x}{l}\right),$$

obținem:

$$\alpha = -\frac{\Delta I}{I_0}\left[\frac{d}{l} - \frac{1}{2\pi}\left(\sin\frac{2\pi(c+d)}{l} - \sin\frac{2\pi c}{l}\right)\right]$$

După efectuarea transformărilor trigonometrice obținem:

$$\alpha = -\frac{\Delta I}{I_0}\left[\frac{d}{l} - \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi(d+2c)}{l}\cdot\sin\frac{\pi d}{l}\right]$$

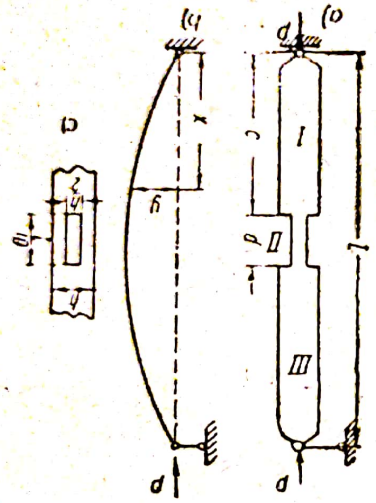


Fig. 31

Pentru valori mici ale lui d în raport cu valoarea lui l se poate admite că:

$$\sin\frac{\pi d}{l} = \frac{\pi d}{l}$$

atunci

$$\alpha = -\frac{2\Delta I}{I_0}\frac{d}{l}\sin^2\frac{\pi(d+2c)}{2l}.$$

Dacă d este foarte mic în raport cu c, se poate scrie următorul rezultat definitiv:

$$\alpha = -\frac{2\Delta I}{I_0}\frac{d}{l}\sin^2\frac{\pi c}{l}.$$

Cea mai periculoasă secțiune slăbită, pentru care forța critică este minimă, se determină din următoarea relație:

$$\frac{d\alpha}{dc} = \frac{2\Delta I}{I_0}\frac{d}{l}\,2\sin\frac{\pi c}{l}\cos\frac{\pi c}{l} = 0$$

ceea ce se realizează atunci când

$$\frac{\pi c}{l} = \frac{\pi}{2}$$

Prin urmare

$$c = \frac{l}{2} \text{ și } \alpha = \frac{-2\Delta I}{I_0}\frac{d}{l} \qquad (52)$$

Astfel secțiunea cea mai periculoasă de slăbire este la mijlocul barei.

Să analizăm acum influența slăbirii asupra unei bare care are la mijloc $\left(c = \frac{l}{2}\right)$ o gaură dreptunghiulară având $\frac{1}{10}l$ lungime și $\frac{h}{2}$ lățime (fig. 31 c). Atunci

$$\Delta I = \frac{b\left(\frac{h}{2}\right)^3}{12} = \frac{1}{8}I_0$$

Din expresia (52) rezultă

$$\alpha = -2\frac{1}{8}\frac{1}{10} = -\frac{1}{40}$$

Forța critică este:

$$P_{cr} = \left(1 - \frac{1}{40}\right) P_f = \frac{39}{40}\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Din această expresie rezultă că chiar o slăbire locală destul de mare reduce puțin valoarea forței critice. Aceasta permite să tragem concluzia că la slăbirile mici, cum sunt găurile de nituri, — influența slăbirilor asupra valorii forței critice poate fi neglijată, introducându-se în calcule momentul de inerție brut.

§ 9. Influența forței tăietoare asupra valorii forței critice la barele cu secțiune plină

Pentru ca să examinăm influența forței tăietoare asupra valorii forței critice, trebue să ținem seamă în ecuația diferențială a axei deformate, atât de influența momentului cât și de aceea a forței tăietoare.

Lunecarea se exprimă prin formula:

$$\gamma = \frac{kQ}{GF} \tag{53}$$

în care k este un coeficient, care ține seama de influența formei secțiunii transversale a barei; pentru o secțiune dreptunghiulară $k = 1{,}2$, pentru una circulară $k = 1{,}11$;

G — modulul de elasticitate transversală.

Unghiul suplimentar de rotire a tangentei față de axa (fig. 32) provocat de acțiunea forțelor transversale, este egal cu unghiul de lunecare.

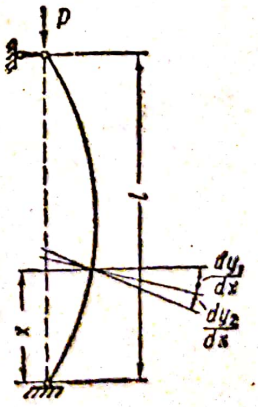


Fig. 32

$$\frac{dy_2}{dx} = \gamma = \frac{kQ}{GF} = \frac{k}{GF}\frac{dM}{dx}$$

de unde

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{k}{GF}\frac{d^2M}{dx^2}$$

Această expresie determină curbura suplimentară a barei provocată de încovoiere. Față de aceasta, ecuația diferențială a axei deformate, care cuprinde influența momentului și a forței tăietoare, se va scrie astfel:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{d^2y_2}{dx^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{k}{GF}M'' \tag{54}$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentul încovoietor într'o secțiune oarecare a barei este $M = Py$, deci și $M'' = Py''$, astfel încât ecuația (54) poate fi adusă la forma următoare

$$EI\left(1 - \frac{kP}{GF}\right)y'' + Py = 0$$

Integrala acestei ecuații este

$$y = A \cos mx + B \sin mx$$

în care

$$m = \sqrt{\frac{P}{EI\left(1 - \frac{kP}{GF}\right)}}$$

Introducerea condițiilor limită ($y = 0$, când $x = 0$ și $x = l$), ne va da ecuația caracteristică

$$\sin ml = 0$$

care este satisfăcută pentru următoarele valori:

$$ml = \pi,\ 2\pi,\ \ldots\ldots,\ n\pi$$

Forța critică minimă se deduce din egalitatea:

$$l \cdot \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI\left(1 - \frac{kP_{cr}}{GF}\right)}} = \pi$$

de unde

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{GF}\cdot\frac{\pi^2 EI}{l^2}} = \alpha \cdot P_f \qquad (55)$$

Din această expresie rezultă că forța critică, găsită ținând seamă de lunecări este mai mică decât forța critică după formula lui Euler, întrucât coeficientul de corecție $\alpha < 1$.

Observăm că

$$\frac{\pi^2 EI}{FGl^2} = \frac{\sigma_{cr}}{G},$$

în care σ_{cr} este rezistența critică, fără a ține seama de influența forței tăietoare.

Dacă admitem pentru oțel modulul de elasticitate transversală

$$G = 800.000\ \text{kg/cm}^2,$$

iar rezistența critică egală cu limita de curgere

$$\sigma_{cr} = 2.000\ \text{kg/cm}^2$$

atunci

$$\frac{\sigma_{cr}}{G} = \frac{1}{400}$$

Deci corecția pentru o bară cu secțiune plină este destul de mică.

Scanned with OKEN Scanner

§ 10. Stabilitatea barelor cu zăbreluțe

La barele compuse, toate lunecările provocate de acțiunea forței de compresiune sunt preluate aproape în întregime de zăbreluțele care leagă elementele principale ale barei. Deci, forța critică pentru asemenea bare depinde atât de secțiunile transversale ale elementelor principale cât și de secțiunile transversale ale zăbreluțelor. Influența lunecării asupra barelor compuse este mult mai mare decât la cele cu secțiunea plină, astfel încât ea nu mai poate fi neglijată.

La construcțiile metalice solidarizarea elementelor principale se face de obiceiu cu zăbreluțe sau plăcuțe (fig. 33); distribuirea acestor legături influențează asupra valorii eforturilor care apar în ele, precum și asupra stabilității barei întregi[1]). Pentru stabilitatea unei bare compuse nu există nici o soluție exactă a problemei. Dacă distanța d între nodurile zăbreluțelor (fig. 33) nu este mare în raport cu lungimea l a barei întregi, atunci se poate efectua următorul calcul aproximativ.

1) Zăbreluțele

Sub influența lunecărilor, zăbreluțele se deformează (fig. 34), iar unghiul de rotire care se formează datorit micilor deformații, poate fi calculat cu ajutorul expresiei

$$\bar{\gamma} \approx \operatorname{tg} \bar{\gamma} = \frac{\bar{\delta}_{11}}{d}$$

în care $\bar{\delta}_{11}$ este deplasarea provocată de o forță unitară, aplicată în direcția forței Q*).

Admițând că îmbinările zăbreluțelor sunt articulate, deplasările se pot determina din expresia:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}^2 S}{EF}$$

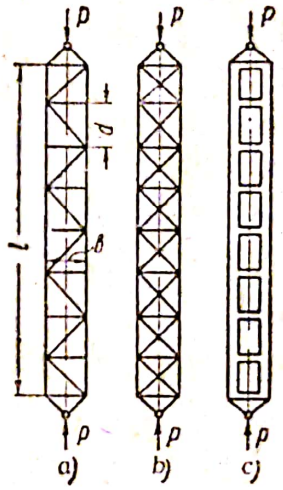


Fig. 33

Dacă se ține seamă numai de deformația zăbreluțelor, atunci vom avea în montant: efortul $\bar{N} = 1$, lungimea $b = \frac{d}{\operatorname{tg}\alpha}$, suprafața secțiunii transversale F_p; — în diagonală: efortul $\bar{N} = \frac{1}{\cos \alpha}$, lungimea $\frac{d}{\sin \alpha}$, suprafața secțiunii transversale F_q.

[1]) Accidentul de proporții enorme cu 70 victime, care s'a produs la montarea podului peste fluviul St. Laurențiu, a fost provocat de ruperea zăbreluțelor de solidarizare ale unei bare compuse.

*) Ca bază pentru această soluție s'a admis ipoteza că distribuția lunecărilor pe lungimea barei este proporțională cu diagrama forțelor tăietoare. O evaluare mai precisă a lunecărilor este dată de către prof. A. R. Rjanițchi în lucrarea „Bare compuse cu legături elastice" Matematica și mecanica aplicată vol. IV ed. 3, 1940.

Făcând substituirea acestor valori în expresia deplasării obținem:

$$\delta_{11} = \frac{d}{E}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha \sin\alpha F_q} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha F_p}\right).$$

Față de aceasta, deplasarea unghiulară $\bar{\gamma}$ provocată de forța $Q = 1$ se determină prin expresia:

$$\bar{\gamma} = \left[\frac{1}{F_q \cos^2\alpha \sin\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha F_p}\right]\frac{1}{E} \qquad (56)$$

Comparând expresiile (53) și (56) rezultă că în calculele la stabilitate a unei bare compuse se poate folosi expresia (55), în care valoarea $\frac{k}{GF} = \bar{\gamma}$ este înlocuită cu valoarea unghiului $\bar{\gamma}$ din expresia (56).

Atunci forța critică se determină cu ajutorul expresiei

$$P_{cr} = P_f \frac{1}{1 + \frac{P_f}{E}\left[\frac{1}{F_q \sin\alpha \cos^2\alpha} + \frac{1}{F_p \operatorname{tg}\alpha}\right]} = \alpha_1 \cdot P_f \qquad (57)$$

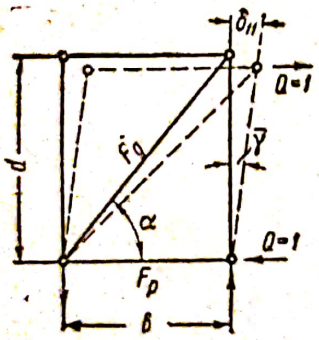


Fig. 34

Valoarea astfel obținută pentru forța critică a unei bare compuse asigură rezistența zăbrelușelor, întrucât numai cu această condiție ne putem bizui pe momentul de inerție integral al întregii secțiuni.

Din ecuația (57) rezultă că diagonalele zăbrelușelor au un rol mai important pentru asigurarea stabilității, decât montanții. De exemplu, în cazul când rigiditatea diagonalei este egală cu a montantului EF și unghiul $\alpha = 45°$

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 + P_f \frac{1}{EF}(2{,}83 + 1)}$$

Dacă o bară compusă are zăbrelușe în două plane, suprafețele secțiunilor F_p și F_q trebuesc dublate.

2. Plăcuțele

Să examinăm acum cazul când elementele principale ale unei bare compuse sunt solidarizate cu plăcuțe (fig. 33 c).

In acest caz determinăm valoarea deplasării δ_{11}, ca și o deplasare

într'un sistem în cadre (fig. 35 a) considerând că forţa tăietoare $Q = 1$ se repartizează în mod egal între elementele principale ale barei. Din fig. 35 b avem:

$$\delta_{11} = \int \frac{\overline{M}_1^2}{EI}\, dx = \frac{4 \cdot \frac{d}{6}\frac{d^2}{4 \cdot 4}}{EI_d} + \frac{2\,\frac{b}{6}\,\frac{d^2}{4}}{EI_b} = \frac{d^3}{24\,EI_d} + \frac{d^2 b}{12\,EI_b}$$

Prin urmare deplasarea unghiulară va fi

$$\bar{\gamma} = \frac{\delta_{11}}{d} = \frac{d^2}{24\,EI_d} + \frac{bd}{12\,EI_b}$$

Repetând procedeul de calcul din exemplul precedent, obţinem următoarea expresie pentru forţa critică:

$$P_{cr} = P_f \frac{1}{1 + \left(\frac{bd}{12\,EI_b} + \frac{d^2}{24\,EI_d}\right) P_f} = \alpha_2 P_f \qquad (58)$$

Valoarea coeficientului α_2 se micşorează când distanţa d se măreşte.

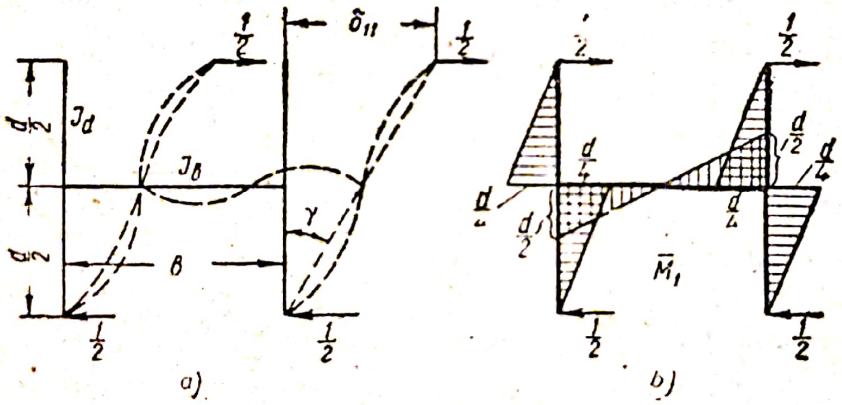


Fig. 35

Să considerăm cazul particular când rigiditatea plăcuţelor este foarte mare în raport cu rigiditatea elementului principal, adică admitem că $EI_b = \infty$; atunci primul membru din paranteze poate fi neglijat şi obţinem

$$P_{cr} = P_f \frac{1}{1 + P_f \frac{d^2}{24\,EI_d}} = P_f \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 d^2}{24 l^2}\frac{I}{I_d}}$$

în care I este momentul de inerţie al întregii secţiuni compuse.

Momentele de inerţie I şi I_d pot fi exprimate prin razele de giraţie şi suprafeţele secţiunilor transversale.

Atunci

$$P_{cr} = P_f \frac{1}{1 + \frac{3{,}14^2}{24}\frac{d^2 i^2\, 2F}{l^2 i_d^2\, F}} = P_f \frac{1}{1 + 0{,}83\,\frac{\lambda_d^2}{\lambda_l^2}}$$

în care λ_l este coeficientul de subțirime al barei și λ_d coeficientul de subțirime al elementului principal.

Dacă înlocuim pe 0,83 cu 1, obținem

$$P_{cr} = P_f \frac{\lambda_l^2}{\lambda_l^2 + \lambda_d^2}$$

Pe această relație se bazează determinarea coeficientului de reducere a rezistențelor admisibile, recomandată de normele de calcul pentru barele compuse și care este egal cu $\sqrt{\lambda_l^2 + \lambda_d^2}$.

Stabilitatea barelor compuse va fi asigurată cu condiția ca zăbreluțele sau plăcuțele să aibă rezistența necesară, fiind calculate la acțiunea forței tăietoare.

Valoarea forței tăietoare poate să fie determinată și aproximativ. Dacă admitem că sub acțiunea forței axiale bara se încovoaie (fig. 36) după o sinusoidă a cărei ecuație este

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l},$$

atunci într'un punct oarecare al acestei curbe unghiul de înclinare al tangentei se determină cu ajutorul expresiei:

$$\varphi = \operatorname{tg} \varphi = y' = f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$$

Din cauză că deformația este neînsemnată, se poate admite că $\operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi$ și atunci valoarea forței tăietoare va fi:

$$Q = P \sin \varphi = Pf \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}.$$

Din această expresie rezultă că valoarea forței tăietoare depinde mult de raportul $\frac{f}{l}$. Valoarea ei este maximă la extremitățile barei, adică pentru $x = 0$ și $x = l$; această valoare este

$$Q = \mp P \frac{f}{l} \pi.$$

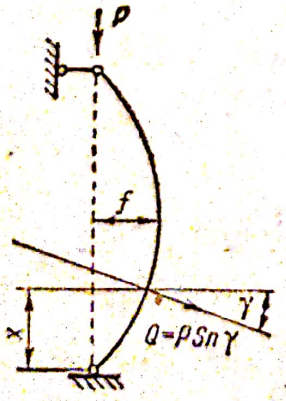


Fig. 36

Pentru ca să stabilim asupra cărei valori a săgeții f trebue să ne oprim, este recomandabil să pornim dela ipoteza că zăbreluțele și bara sunt de egală rezistență. In acest caz trebue să întrebuințăm metoda prof. K. S. Zavriev expusă mai jos.

Când forța va atinge valoarea critică și se vor creea condițiile pentru flambarea barei, atunci valoarea săgeții maxime f_0 (în limitele zonei elastice) se obține din expresia

$$\frac{P_{cr}}{F} + \frac{P_{cr} f_0}{W} = \sigma_e,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$f_0 = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{cr}} - 1\right)\frac{W}{F} = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{cr}} - 1\right)\frac{i^2}{\left(\frac{h}{2}\right)} \approx \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{cr}} - 1\right) i,$$

în care σ_e — limita de elasticitate și i — raza de giratie.

Prin urmare, valoarea limită a forței tăietoare

$$Q_{lim} = \frac{P_{cr} f_0 \pi}{l} = P_{cr}\,\pi\,\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{cr}} - 1\right).$$

Dacă forța admisibilă este dată cu coeficientul de siguranță n, atunci forța pentru calcul va fi

$$Q = \frac{P_{cr}}{n}\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{cr}} - 1\right) = Pu$$

în care

$$u = \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{cr}} - 1\right)$$

Deoarece σ_{cr} este o funcție de λ, u este și el o funcție de λ.

In tabloul 1 sunt date valorile lui u pentru diferite valori ale lui λ.

Tabloul 1

λ	80	90	100	110	120	130	140	150
u	0,002	0,004	0,007	0,009	0.016	0,022	0,028	0,033

Probleme și exerciții

1) Să se alcătuiască ecuațiile de stabilitate și să se determine forțele critice pentru cele cinci cazuri reprezentate în fig. 37.

Răspunsurile sunt date în tabloul 2

Tabloul 2

Cazul	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
Ecuația de stabilitate	$\operatorname{tg} nl = \frac{1}{nl}$	$\operatorname{tg} nl = -nl$	—	$\operatorname{tg} nl = 2nl$	$\cos nl = 0$
Forța critică	$P_{cr} = \frac{0{,}74EI_0}{l^2}$	$P_{cr} = \frac{4{,}08EI_0}{l^2}$	$P_{cr} = \frac{3{,}06EI_0}{l^2}$	$P_{cr} = \frac{1{,}35EI_0}{l^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{l^2}$

2) Să se determine cu metoda energetică forța critică pentru sistemul înfățișat în fig. 38, considerând rigiditatea resortului egală cu c (reacțiunea la compresiunea unitară a resortului).

Răspuns :

$$P_{cr} = \frac{l_1 \, l_2}{2\,l_1 + l_2}\, c$$

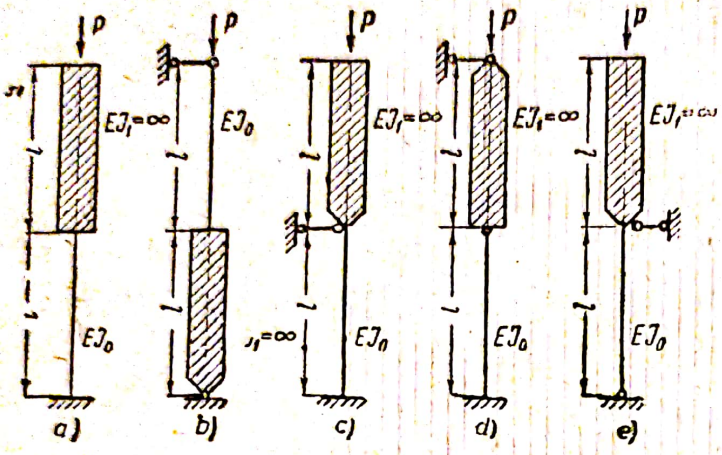


Fig. 37

Fig. 38

3) Să se determine rigiditatea minimă a resortului c, la care, pentru bara reprezentată în fig. 39, forța critică va avea aceeași valoare atât la încovoierea înfățișată în fig. 39 a (cu linii punctate), cât și la pierderea stabilității din cauza deformației resortului (fig. 39 b).

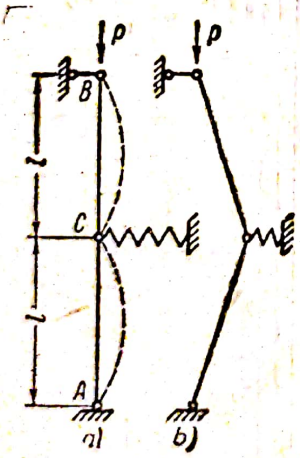


Fig. 39

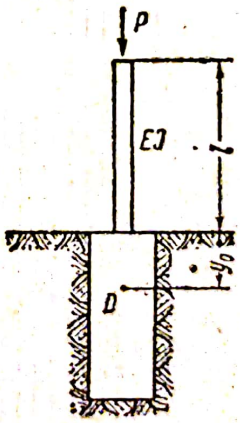


Fig. 40

Răspuns :

$$c = \frac{2\,\pi^2\, EI}{l^3}$$

4) Să se alcătuiască ecuația caracteristică pentru stâlpul cu fundație adâncă reprezentat în fig. 40, considerând că în momentul pierderii stabilității fundația se va roti în jurul punctului D, care se găsește la adâncimea y_0. Elasticitatea fundației se va exprima printr' un coeficient c (momentul aplicat în punctul D necesar pentru a roti fundația cu unghiul $\varphi = 1$).

Răspuns :

$$v^2 \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} v}{v} + \frac{y_0}{l} \right) = \frac{l}{EI \cdot c}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$v = l\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

5) Să se determine forța critică pentru sistemul reprezentat în fig. 41. (Forței critice minime îi corespunde forma de pierdere a stabilității indicată cu linii punctate).

Răspuns :

$$P_{cr} = \frac{3\ EI}{l^2}.$$

6) Să se determine greutatea critică a unui masiv având rigiditatea infinită $(ql)_{cr}$, susținut de o bară elastică, încastrată la capătul inferior (fig. 42).

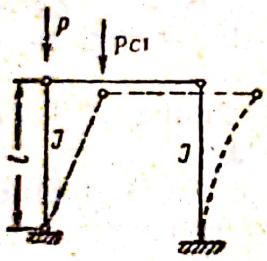


Fig. 41

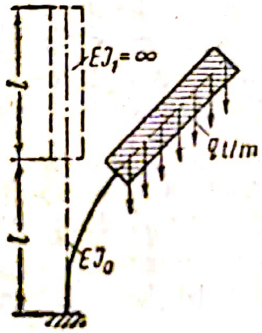


Fig. 42

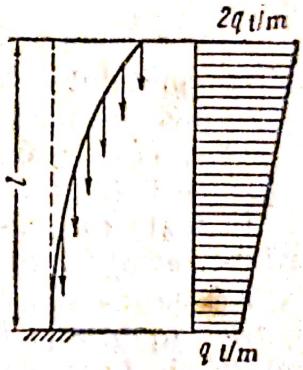


Fig. 43

Răspuns : Ecuația caracteristică va fi :

$$v\ \mathrm{tg}\ v = 2$$

în care

$$v = \sqrt{\frac{ql^3}{EI}};$$

$$q_{cr} = \frac{v^2\ EI}{l^3}.$$

7) Să se determine, folosind metoda lui Korobov, încărcarea critică de compresiune, distribuită după un trapez (fig. 43).

Răspuns:

$$Q_{cr} = \frac{3\ q_{cr}\ l}{2} = \frac{9\ \pi^2\ EI}{14\ l^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 3

STABILITATEA ARCELOR

§ 11. Generalităţi

In capitolul de faţă vom analiza stabilitatea barelor curbe sub acţiunea unei compresiuni axiale, cu aplicaţii în special la arce. Excepţie face § 17, în care se analizează stabilitatea formelor simetrice de încovoiere a arcelor.

In toate cazurile când axa arcului este trasată după curba de presiune, aceste arce vor avea numai compresiuni axiale. [1)]

Arcele, ca şi barele drepte comprimate, pot să-şi piardă stabilitatea, trecând în alte forme de echilibru, la care apar încovoieri suplimentare ale barei curbe.

In cele ce urmează se analizează problemele de stabilitate ale arcelor circulare şi parabolice.

Calculul arcelor circulare este mult mai simplu decât al celor parabolice, întrucât la calculul celor din urmă apar ecuaţii diferenţiale de gradul al treilea şi al patrulea, care nu se pot integra în formă finită, fiind astfel nevoie să se aplice metodele numerice de integrare. De aceea pentru arcele parabolice ne vom folosi de metoda grafoanalitică ; aceasta, cu toată simplicitatea ei, dă rezultate destul de precise.

§ 12. Ecuaţia diferenţială a echilibrului pentru o bară curbă de formă circulară

Pentru o bară curbă de formă circulară având o curbură mică şi care este solicitată la flambaj, ecuaţia de echilibru se prezintă sub următoarea formă :

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = -\frac{M}{EI} \tag{59}$$

în care r_0 este raza de curbură iniţială

r — raza de curbură finală

M şi EI — momentul încovoietor şi rigiditatea la încovoiere.

[1)] Momentele care apar la compresiunea arcelor se neglijează.

Semnul minus în ecuația (59) este luat corespunzător cu semnul momentului, care se consideră pozitiv atunci când produce o micșorare a curburii inițiale a barei.

Să examinăm elementul ds care se găsește între punctele m și n ale barei curbe, reprezentată în fig. 44 a. Notăm deplasarea punctu-

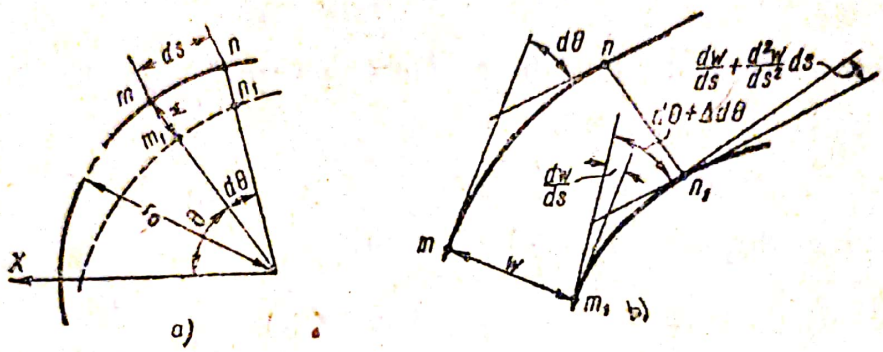


Fig. 44

lui în direcția radială cu w și o vom considera pozitivă atunci când este îndreptată înspre centrul de curbură. Din fig. 44 b rezultă că, creșterea unghiului de înclinare al tangentei în punctul n, față de unghiul de înclinare al tangentei în punctul m, este

$$\Delta\, d\theta = \frac{d^2w}{ds^2}\, ds \qquad \text{(a)}$$

Este evident că

$$\frac{1}{r_0} = \frac{d\theta}{ds}$$

Atunci noua curbură se va determina din egalitatea

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta + \Delta\, d\theta}{ds + \Delta\, ds} \qquad (60)$$

Din asemănarea sectoarelor (fig. 44 a) avem

$$\frac{ds}{r_0} = \frac{ds + \Delta\, ds}{r_0 - w}$$

de unde

$$ds + \Delta\, ds = ds\left(1 - \frac{w}{r_0}\right) \qquad \text{(b)}$$

Substituind (a) și (b) în expresia (60) obținem :

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta + \dfrac{d^2w}{ds^2}\, ds}{ds\left(1 - \dfrac{w}{r_0}\right)}$$

Împărțind numărătorul și numitorul cu ds, după transformări, obținem:

$$\frac{1}{r}\left(1-\frac{w}{r_0}\right)=\frac{1}{r_0}+\frac{d^2w}{ds^2}$$

sau

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}=\frac{w}{rr_0}+\frac{d^2w}{ds^2} \qquad (c)$$

Intrucât raza inițială diferă foarte puțin de cea finală, se poate admite că:

$$\frac{w}{rr_0}=\frac{w}{r_0^2}$$

Atunci din egalitatea (c) obținem

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}=\frac{w}{r_0^2}+\frac{d^2w}{ds^2}$$

Ținând seama de expresia (59) obținem ecuația diferențială a echilibrului axei deformate:

$$\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{w}{r_0^2}=-\frac{M}{EI}$$

Dacă ținem seama că:

$$\frac{dw}{ds}=\frac{dw}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds};$$

$$\frac{d^2w}{ds^2}=\frac{d^2w}{d\theta^2}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2$$

și

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{r_0}$$

obținem aceeași ecuație sub altă formă:

$$\frac{d^2w}{d\theta^2}+w=-\frac{Mr_0^2}{EI} \qquad (61)$$

Am obținut astfel ecuația diferențială a echilibrului în coordonate polare pentru o bară curbă, trasată după un arc de cerc.

§ 13. Stabilitatea unui inel circular supus la o presiune hidrostatică

Sub acțiunea unei compresiuni radiale, un inel circular poate să-și piardă stabilitatea, după cum se arată în fig. 2 a (§ 1).

Să examinăm o jumătate a inelului (fig. 45) sub acțiunea unei încărcări radiale și a reacțiunilor N_0 și M_0. Un punct oarecare c luat pe axa barei va căpăta o deplasare radială w.

Momentul încovoietor în acest punct va fi:

$$M_c=M_0+N_0\,\overline{AD}-\frac{q\,\overline{AC}^2}{2}$$

Intrucât $N_0 = q\ \overline{AO},$

$$M_c = M_0 - \frac{q}{2}\ (\overline{AC}^2 - 2\ \overline{AO} \cdot \overline{AD})$$

Din trigonometrie se cunoaşte următoarea relaţie

$$\overline{OC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AO}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{AO}$$

de unde $$\overline{AC}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{AO} = \overline{OC}^2 - \overline{AO}^2.$$

Substituind această expresie în ecuaţia momentului găsim:

$$M_c = M_0 - \frac{q}{2}\ (\overline{OC}^2 - \overline{AO}^2)$$

însă potrivit fig. 45,

$\overline{OC} = r - w^*$ şi $\overline{AO} = r - w_0$

După substituire, neglijând pătratele deplasărilor infinit mici, obţinem:

$$M_c = M_0 - qr\ (w_0 - w).$$

Ecuaţia diferenţială a echilibrului (61) se va scrie acum sub următoarea formă

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\left(\frac{M_0}{EI} + \frac{qr}{EI}w - \frac{qr}{EI}w_0\right)r^2$$

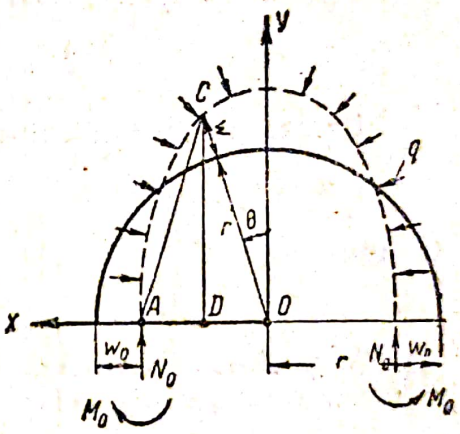


Fig. 45

Notând valoarea constantă

$$-\frac{r^2\ (M_0 - qrw_0)}{EI} = D$$

şi însumând termenii asemenea, obţinem:

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w\left(1 + \frac{qr^3}{EI}\right) = D$$

Integrala completă a acestei ecuaţii diferenţiale este

$$w = A\ \cos n\theta + B\ \sin n\theta + \frac{D}{n^2}$$

Vom determina acum unghiul de rotire relativ al unei secţiuni oarecare

$$\frac{dw}{d\theta} = -An\ \sin n\theta + Bn\ \cos n\theta$$

In această expresie s'a introdus următoarea notaţie

$$n = \sqrt{1 + \frac{qr^3}{EI}} \qquad (62)$$

* Intrucât w este îndreptat dinspre centrul de curbură în afară i se atribue semnul minus.

Conform condițiilor limită

$$\text{pentru } \theta = 0; \qquad \frac{dw}{d\theta} = 0$$

$$\text{pentru } \theta = \frac{\pi}{2} \qquad \frac{dw}{d\theta} = 0$$

astfel încât

$$B = 0 \quad \text{și} \quad A \sin \frac{n\pi}{2} = 0$$

Intrucât în cazul încovoierii $A \neq 0$, rezultă că

$$\sin \frac{n\pi}{2} = 0$$

ceea ce poate avea loc atunci când

$$\frac{n\pi}{2} = \pi;\ 2\pi;\ 3\pi;\ \ldots\ldots \text{ etc.}$$

La sarcina critică minimă corespunde

$$\frac{n\pi}{2} = \pi$$

de unde

$$n = 2$$

Substituind această valoare a lui n în formula (62) obținem valoarea sarcinii critice

$$q_{cr} = 3\frac{EI}{r^3} \tag{63}$$

§ 14. Stabilitatea arcelor circulare sub acțiunea unei presiuni hidrostatice

a) Arce cu două articulații

Un arc circular cu două articulații, sub acțiunea unei încărcări radiale uniform distribuită, va avea eforturi de compresiune în toate secțiunile.[1] Când încărcarea q atinge valoarea critică, arcul își pierde stabilitatea și se încovoaie, după cum se arată în fig. 46.

După cum se știe,[2] forța normală în oricare secțiune a arcului este

$$N = qr$$

Pentru această valoare a lui N momentul încovoietor într'o secțiune oarecare este

$$M_\theta = Nw = qRw$$

---

[1] Se neglijează momentele încovoietoare care apar la compresiunea arcului.
[2] I. P. Procofiev: „Statica construcțiilor" vol. II § 30, 1947.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia diferenţială a încovoierii (6) se transformă în

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w\left(1 + \frac{q\,R^3}{EI}\right) = 0$$

Introducem notaţia

$$n = \sqrt{1 + \frac{qR^3}{EI}} \tag{64}$$

Integrala ecuaţiei axei deformate va fi:

$$w = A \cos n\theta + B \sin n\theta \tag{65}$$

Pentru cazul încovoierii, reprezentat în fig. 46, condiţiile limită se vor formula în felul următor:

$$\text{pentru } \theta = 0, \quad w = 0 \quad \text{şi pentru } \theta = \alpha, \quad w = 0$$

faţă de care

$$A = 0 \quad \text{şi} \quad B \sin n\alpha = 0$$

Intrucât la încovoiere B este diferit de zero,
atunci,

$$\sin n\alpha = 0$$

prin urmare

$$n\alpha = \pi;\ 2\pi;\ \ldots\ldots\ n\pi.$$

La valoarea minimă a încărcării critice corespunde egalitatea $n\alpha = \pi$. Având în vedere expresia (64), găsim:

$$1 + \frac{qR^3}{EI} = \frac{\pi^2}{\alpha^2}$$

de unde obţinem

$$q_{cr} = \frac{EI}{R^3}\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1\right) \tag{66}$$

In cazul particular când $\alpha = \frac{\pi}{2}$ obţinem

$$q_{cr} = 3\frac{EI}{R^3},$$

care este identică cu expresia (63) pentru încărcarea critică a unui inel închis.

Pentru ca să obţinem forţa critică minimă am luat $n\alpha = \pi$. Dacă admitem $n\alpha = 2\pi$; $n\alpha = 3\pi$, etc. atunci vom obţine forţele critice superioare care vor corespunde cazurilor de deformaţie antisimetrice faţă de punctul de inflexiune la cheie. Diferenţa, faţă de deformaţia reprezentată în fig. 46, constă numai în numărul semi-undelor de încovoiere. De aceea vom obţine numai forţe critice impare: q_{1cr}, q_{3cr}, q_{5cr}, etc.

Pentru obţinerea lui q_{2cr}, q_{4cr}, etc. trebue să pornim dela forma simetrică a încovoierii, înfăţişată în fig. 47. Insă pentru scopuri prac-

tice este nevoie să cunoaștem numai valoarea încărcării critice minime, care se determină cu ajutorul expresiei (66). De aceea nu vom lua în considerare alte cazuri ale forțelor critice.

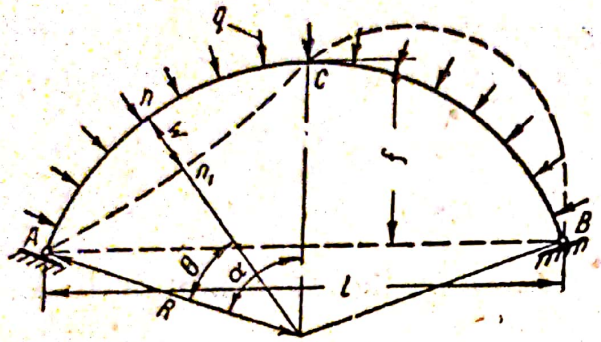


Fig. 46

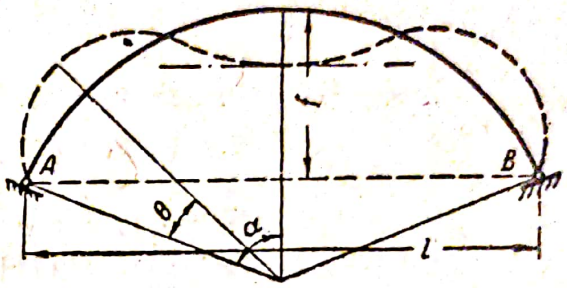


Fig. 47

Pentru arcele pleoștite, când unghiul α este foarte mic în raport cu π, din formula (66) unitatea se poate reduce. Atunci vom obține următoarea valoare aproximativă a încărcării critice:

$$q_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\alpha^2 R^3}$$

Forța critică normală va avea în acest caz următoarea valoare

$$N_{cr} = q_{cr} R = \frac{\pi^2 EI}{(\alpha R)^2} \tag{67}$$

Ținând seamă că $\alpha R = S$, în care S este lungimea semi-arcului, vom obține

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{S^2} \tag{68}$$

Astfel pentru un arc pleoștit, forța critică normală poate fi calculată după formula obișnuită a lui Euler (68), ca și în cazul unei bare articulate la capete având lungimea egală cu jumătatea lungimii arcului.

Pentru ca să stabilim ce fel de arce pot fi considerate ca pleoștite, vom examina ce eroare ne dă formula (68), față de expresia (66) aplicată la calculul unui arc cu următorul raport între săgeată și deschidere

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{5}$$

Raza arcului circular este

$$R = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} = \frac{l^2}{8\,\frac{1}{5}\,l} + \frac{l}{10} = \frac{58}{80}\,l;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sin \alpha = \frac{l}{2R} = \frac{l}{2\left(\frac{58}{80}\right) l} = \frac{40}{58} = 0{,}69;$$

$$\alpha = 43^0\ 30'$$

Raportul

$$\frac{\pi^2}{\alpha^2} = \left(\frac{180}{43{,}5}\right)^2 = 17{,}1$$

Incărcarea critică din formula (65) este egală cu

$$q_{cr} = \frac{EI}{R^3}\ (17{,}1 - 1) = 16{,}1\ \frac{EI}{R^3},$$

iar forţa critică normală

$$N_{1cr} = 16{,}1\ \frac{EI}{R^2}$$

După formula aproximativă (67), sau ceea ce este absolut identic, după expresia (68)

$$N_{2cr} = 17{,}1\ \frac{EI}{l^2}$$

Diferenţa între N_{1cr} şi N_{2cr} reprezintă 6,2%. Astfel pentru arcele cu raportul $\frac{f}{l} \leqslant \frac{1}{5}$ forţa critică normală poate fi determinată cu ajutorul formulei aproximative (68).

b) Arce încastrate la extremităţi

In cazul când extremităţile arcelor sunt încastrate, la încărcarea critică minimă corespunde deformaţia axei arătată cu linii punctate în fig. 48 a.

Această problemă diferă de cea precedentă (arce cu două articulaţii) prin prezenţa momentelor de încastrare M_0. Transformând arcul încastrat la extremităţi într'un arc cu două articulaţii şi aplicând momentele M_0 în punctele A şi B — după cum se arată în fig. 48 b — obţinem în fiecare punct al arcului cu două articulaţii momente încovoietoare suplimentare a căror diagramă este reprezentată în fig. 48 c.

Intr'o secţiune oarecare, situată la distanţa x dela mijlocul arcului, momentul suplimentar este egal cu

$$M'_\theta = - M_0\ \frac{2x}{l}$$

întrucât

$$x = R \sin \theta \quad \text{şi} \quad l = 2R \sin \alpha,$$

vom avea

$$M'_\theta = - M_0\ \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentul încovoietor total într'o secţiune oarecare este

$$M_\theta = qRw - M_0 \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$$

Ecuaţia diferenţială a echilibrului (61) va lua următoarea formă

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{R^2}{EI}\left(qRw - M_0\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right)$$

sau

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w\left(1 + \frac{qR^3}{EI}\right) = \frac{M_0R^2\sin\theta}{\sin\alpha\, EI}$$

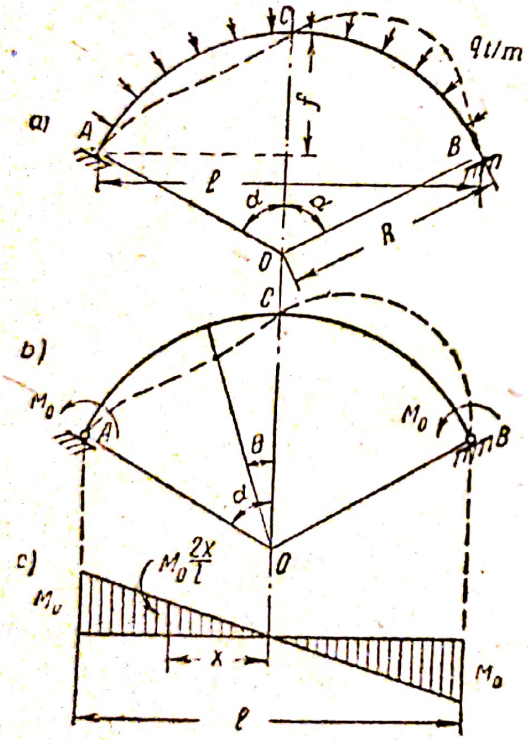


Fig. 48

Notând

$$n = \sqrt{1 + \frac{qR^3}{EI}} \qquad (69)$$

$$C = \frac{M_0\, R^2}{EI\sin\alpha}$$

obţinem

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + n^2w = C\sin\theta \qquad (70)$$

Integrala acestei ecuaţii diferă de aceea a ecuaţiei (65) prin termenul suplimentar

$$\frac{C}{n^2 - 1}\sin\theta$$

astfel încât ea va avea următorul aspect :

$$w = A\cos n\theta + B\sin n\theta + \frac{C}{n^2-1}\sin\theta$$

ceea ce se poate verifica uşor calculând derivata a doua şi făcând substituirea în ecuaţia (70).

Spre deosebire de un arc cu două articulaţii trebue să se stabilească în cazul de faţă trei condiţii limită pentru determinarea constantelor A, B şi C.

Condiţia limită suplimentară va fi egalitatea cu zero a unghiului de rotire în secţiunea de încastrare.

Astfel vom obţine cele trei condiţii limită :

$$\text{când}\quad \theta = 0 \quad w = 0$$

$$\text{când}\quad \theta = \alpha \quad w = 0 \quad \frac{dw}{d\theta} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Prima condiție este îndeplinită atunci când $A = 0$, iar celelalte două ne dau:

$$B \sin n\alpha + \frac{C}{n^2-1} \sin \alpha = 0;$$

$$Bn \cos n\alpha + \frac{C}{n^2-1} \cos \alpha = 0$$

Egalând cu zero determinantul format din coeficienții acestei ecuații, vom obține ecuația caracteristică

$$D = \begin{vmatrix} \sin n\alpha & \frac{1}{n^2-1} \sin \alpha \\ n \cos n\alpha & \frac{1}{n^2-1} \cos \alpha \end{vmatrix} = 0$$

De unde după reducerea lui $\frac{1}{n^2-1}$ în coloana a doua, obținem

$$\sin n\alpha \cos \alpha - n \cos n\alpha \cdot \sin \alpha = 0$$

și în definitiv

$$n \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} n\alpha = 1 \qquad (71)$$

Ecuația (71) ne dă posibilitatea să determinăm valoarea lui n și prin urmare și valoarea sarcinii critice. Din expresia (69) obținem:

$$q_{cr} = \frac{EI}{R^3} (n^2 - 1)$$

In tabloul 3 sunt trecute valorile lui n corespunzătoare la diferite valori ale lui α

Tabloul 3

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
n	8,62	4,38	3	2,36	2.07	2

Trebue să relevăm că în paragraful de față, cât și în cel precedent, am admis ipoteza că până în momentul stării critice acționau în toate secțiunile arcului numai forțe axiale. In realitate însă, din cauza compresiunii, arcul va suferi și o încovoiere. Astfel, înainte de a se deforma sub acțiunea sarcinii critice arcul va căpăta din cauza încovoierii o deformație simetrică. Momentele încovoietoare în acest caz nu sunt mari și pot fi neglijate. In afară de aceasta, încărcarea critică minimă va produce o deformație antisimetrică, deci influența deformației primare simetrice, provocată de încovoiere, va fi și mai redusă.

c) Arce cu trei articulații

In fig. 49 sunt reprezentate cu linii punctate două moduri posibile de pierdere a stabilității unui arc circular cu trei articulații încărcat

cu o presiune hidrostatică. In primul caz, fig. 49 a, caracterul deformației coincide cu deformația unui arc cu două articulații, deci încărcarea critică poate fi determinată cu ajutorul formulei (66). In al doilea caz (fig. 49 b) se produce o deformație simetrică cu deplasarea verticală a articulației c. Incercările au dovedit că pentru un arc circular cu trei articulații, la încărcarea critică minimă corespunde o formă simetrică de deformație (fig. 49 b).

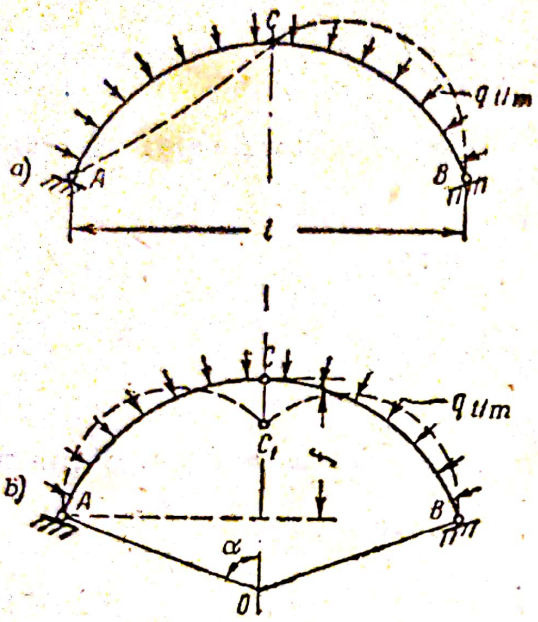


Fig. 49

Sarcina critică minimă pentru un arc cu trei articulații se deduce din următoarea formulă[1])

$$q_{cr} = \frac{4u^2 - \alpha^2}{\alpha^2} \frac{EI}{R^3} \qquad (72)$$

în care α este unghiul indicat în fig. 49 b, iar valoarea u se determină din ecuația caracteristică

$$\frac{\operatorname{tg} u - u}{u^3} = \frac{4(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)}{\alpha^3} \qquad (73)$$

In toate cazurile examinate mai sus, încărcarea critică pentru arcele circulare poate fi exprimată prin formula

$$q_{cr} = K \frac{EI}{R^3}; \qquad (74)$$

Efortul axial în arc este

$$N = K \frac{EI}{R^2} \qquad (75)$$

Valorile coeficientului de stabilitate K pentru formulele (74) și (75) în funcție de unghiul α sunt trecute în tabloul 4

Tabloul 4

2α	Arc încastrat la extremități	Arc cu două articulații	Arc cu trei articulații
30°	294,0	143,0	108,0
60°	73,3	32,0	27,6
90°	32,4	15,0	12,0
120°	18,1	8,0	6,75
150°	—	4,76	4,32
180°	8,0	3,0	3,0

[1]) Calculul de stabilitate al unui arc cu trei articulații solicitat de o presiune hidrostatică este expus de către A. N. Dinnik în „Flambajul" 1939.

Scanned with OKEN Scanner

Incărcarea critică poate fi deasemenea determinată şi cu ajutorul formulei

$$q_{cr} = K_1 \frac{EI}{l^3}$$

Valorile coeficientului K_1 în funcţiune de raportul dintre săgeată şi deschiderea arcului sunt indicate în tabloul 5

Tabloul 5

f/l	Arc încastrat	Arc cu două articulaţii	Arc cu trei articulaţii
0,1	58,9	28,4	22,2
0,2	90,4	39,3	33,5
0,3	93,4	40,9	34,9
0,4	80,7	32,8	30,2
0,5	64,0	24,0	24,0

§ 15. Stabilitatea unui arc circular cu extremităţile încastrate elastic, supus la acţiunea unei presiuni hidrostatice

Dacă extremităţile unui arc sunt încastrate elastic, după cum se arată în fig. 50 a, atunci la încărcarea critică minimă se va produce deformaţia arcului indicată cu linii punctate în figură.

Spre deosebire de un arc cu extremităţile încastrate, secţiunile de reazim ale arcului încastrat elastic se vor roti. In sistemul de calcul indicat în fig. 50 b, sub influenţa momentelor dela extremităţi, arcul va primi momente încovoietoare suplimentare a căror diagramă este reprezentată în fig. 50 c. Expresia momentului încovoietor total şi ecuaţia diferenţială a echilibrului precum şi integrala ei vor fi identice cu acelea ale unui arc cu extremităţile încastrate rigid.

$$M_\theta = qRw - M_0 \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$$

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w\left(1 + \frac{qR^3}{EI}\right) = \frac{M_0 R^2 \sin\theta}{EI \sin\alpha} = C \sin\theta$$

şi

$$w = A\cos n\theta + B\sin n\theta + \frac{C}{n^2-1}\sin\theta\,; \qquad (76)$$

în care n se determină din ecuaţia (69).

Deosebirea între cele două soluţii constă numai în condiţiile limită. Spre deosebire de condiţiile indicate la rezolvarea cazului unui arc încastrat rigid (fig. 46), vom avea :

pentru $\theta = \alpha$ $\quad w = 0$
pentru $\theta = 0$ $\quad w = 0$

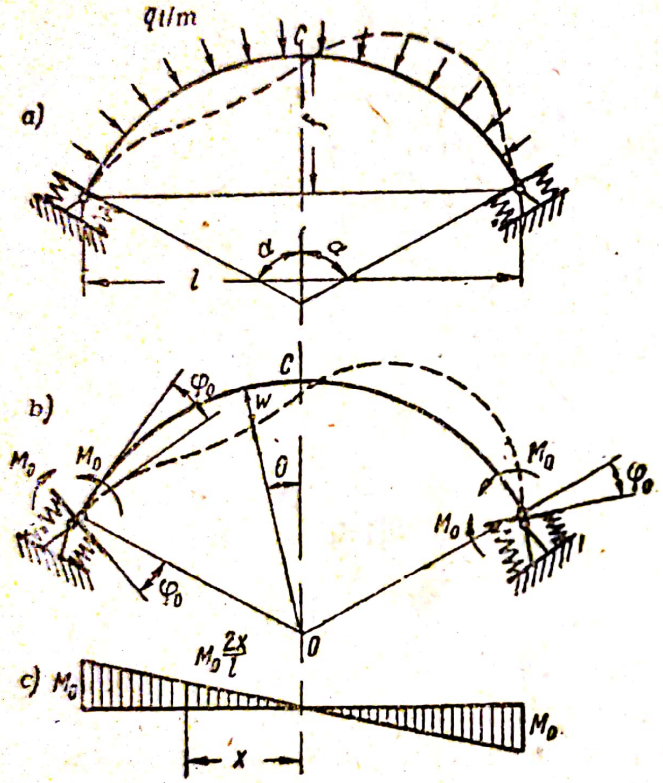


Fig. 50

$$\frac{dw}{d\theta} = \varphi_0 \frac{ds}{d\theta} = \varphi_0 R.$$

In această expresie unghiul φ_0 este unghiul de rotire al încastrării rigide, care poate fi determinat din formula care urmează, prin momentul M_0, care acţionează asupra reazimului elastic.

$$\varphi_0 = \bar{\varphi}_0 M_0$$

în care unghiul de rotire $\bar{\varphi}_0$ dat de momentul $M_0 = 1$ reprezintă coeficientul de încastrare al extremităţii arcului (modulul de elasticitate al reazimului) şi poate fi determinat din condiţiile date de rezemare a arcului.

Din prima condiţie limită găsim

$$A = 0$$

Celelalte două condiţii ne dau

$$B \sin n\alpha + \frac{C}{n^2 - 1} \sin \alpha = 0 :$$

$$Bn \cos n\alpha + \frac{C}{n^2 - 1} \cos \alpha = - R \varphi_0 = - \bar{\varphi}_0 M_0 R$$

Substituind în aceste ecuaţii valoarea

$$C = \frac{M_0 R^2}{EI \sin \alpha}$$

obţinem

$$B \sin n\alpha + M_0 \frac{R^2}{EI (n^2 - 1)} = 0$$

$$Bn \cos n\alpha + M_0 \left[\frac{R^2}{EI (n^2 - 1)} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \bar{\varphi}_0 R \right] = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Egalând cu zero determinantul, compus din coeficienții de pe lângă constantele B și M_0, obținem ecuația de stabilitate

$$\begin{vmatrix} \sin n\alpha & \dfrac{R^2}{EI\,(n^2-1)} \\ n\cos n\alpha & \left[\dfrac{R^2}{EI\,(n^2-1)}\,\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\bar{\varphi}_0 R\right] \end{vmatrix} = 0 \qquad (77)$$

Împărțind termenii din coloana întâia a determinantului (77) cu $\sin n\alpha$ iar aceia din coloana a doua cu $\dfrac{R^2}{EI\,(n^2-1)}$, obținem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n\operatorname{ctg} n\alpha & \left[\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\bar{\varphi}_0 R}{EI}\,(n^2-1)\right] \end{vmatrix} = 0$$

Rezolvând determinantul găsim

$$\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\bar{\varphi}_0 R}{EI}\,(n^2-1)\right]-n\operatorname{ctg} n\alpha = 0$$

Notând valoarea fără dimensiuni,

$$\frac{EI\,\bar{\varphi}_0}{R} = \rho \qquad (78)$$

după transformare obținem

$$\operatorname{tg}\alpha\,[n\operatorname{ctg} n\alpha + (1-n^2)\,\rho] = 1 \qquad (79)$$

Încărcarea critică va fi egală cu

$$q_{cr} = \frac{EI}{R^3}\,(n^2-1) \qquad (80)$$

în care n este rădăcina ecuației (79).

La valoarea $\rho = 0$, adică $\bar{\varphi}_0 = 0$, care corespunde cu încastrarea rigidă la extremitățile arcului, din ecuația (79) se obține ecuația caracteristică pentru un arc încastrat la extremități [a se vedea ecuația (71)]. Dacă $\rho = \infty$ (reazim articulat) este necesar ca în ecuația (79) să introducem $\operatorname{ctg} n\alpha = \infty$, după care ajungem la ecuația de stabilitate a unui arc cu două articulații.

Dacă încărcarea critică este reprezentată sub forma $q_{cr} = K\dfrac{EI}{l^2}$ atunci coeficientul de stabilitate K pentru un arc cu încastrări elastice va fi cuprins între coeficientul de stabilitate al unui arc încastrat la extremități și al unui arc cu două articulații.

§ 16. Stabilitatea arcelor parabolice

Sub acțiunea unei sarcini verticale uniform distribuite, un arc parabolic va suporta numai compresiuni axiale.[1] La o anumită valoare

[1] Momentele care apar din cauza deformației arcului se neglijează.

a încărcării $q = q_{cr}$, arcul poate să se deformeze într'o parte, iar în secţiunile lui, în afară de compresiune, va apare şi o încovoiere. Astfel se va produce pierderea stabilităţii sub acţiunea compresiunii axiale.

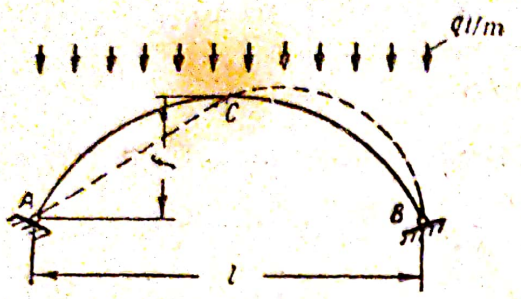


Fig. 51

În fig. 51 este înfăţişată o formă de pierdere a stabilităţii unui arc parabolic cu două articulaţii, corespunzătoare unei sarcini critice minime.

Rezolvarea exactă a problemei de stabilitate a unui asemenea arc a fost obţinută pentru prima oară de către A. S. Loşchin. Acad. A. N. Dinnik a studiat stabilitatea arcelor parabolice cu secţiuni constante şi variabile şi diferite moduri de fixare a extremităţilor şi prin integrarea unei ecuaţii diferenţiale de gradul al treilea destul de complicată, a calculat coeficienţii de stabilitate pentru diferite cazuri. Ecuaţiile obţinute nu se rezolvau în formă finită şi s'a aplicat metoda numerică de integrare. Nu vom expune aci calculele pentru rezolvarea exactă a problemei, ci ne vom mărgini la indicarea rezultatelor definitive. Ca şi pentru arcele circulare, încărcarea critică se determină cu ajutorul expresiei

$$q_{cr} = K\frac{EI}{l^2} \qquad (81)$$

Valorile coeficientului de stabilitate K în funcţiune de raportul dintre săgeata şi deschiderea arcului sunt date în tabloul 6.

Tabloul 6

f/l	Arce încastrate	Arce cu două articulaţii	Arce cu trei articulaţii	
			la încovoiere simetrică	la încovoiere antisimetrică
0,1	60,7	28,5	22,5	28,5
0,2	101,0	45,4	39,6	45,4
0,3	115,0	46,5	47,3	46,5
0,4	111,0	43,9	49,2	43,9
0,5	97,4	38,4	—	38,4
0,6	83.8	30,5	38,0	30,5
0,8	59,1	20,0	28,8	20,0
1,0	43.7	14,1	22,1	14,1

Valorile coeficientului K trecute în tabloul 6 pentru un arc cu trei articulaţii sunt calculate atât pentru forma simetrică a încovoierii, după cum se arată în fig. 49 b, cât şi pentru forma antisimetrică, după cum se indică în fig. 49 a.

In ultimul caz, soluţia pentru un arc cu trei articulaţii coincide cu aceea pentru un arc cu două articulaţii. *In calculele practice ale arcelor cu trei articulaţii, trebue să folosim valorile lui K trecute în ultimele două coloane ale tabloului 6, alegând dintre cele două valori ale coeficientului K pe cea mai mică.*

Scanned with OKEN Scanner

La construcţiile de poduri, arcele au foarte adeseori momentul de inerţie variabil. In asemenea cazuri valoarea forţei critice poate să fie determinată prin alcătuirea şi integrarea ecuaţiei diferenţiale a echilibrului în care se ţine seama de variaţia secţiunii.

Pentru mai multe cazuri această problemă este rezolvată, iar pentru cazurile cele mai frecvente de variaţie a momentelor de inerţie sunt întocmite tabele cu valorile coeficienţilor de stabilitate.[1)]

In afară de metoda analitică, determinarea sarcinilor critice pentru arce se poate face şi cu metoda grafo-analitică, pe care o vom folosi, în cele ce urmează, pentru calculul stabilităţii arcelor parabolice cu două articulaţii.

La deformaţia antisimetrică a unui arc cu două articulaţii sub acţiunea încărcării critice minime q_{cr} (fig. 52 a) momentul încovoietor în secţiunea C, precum şi deplasarea verticală a acestui punct sunt egale cu zero; aceasta ne permite să considerăm, în locul arcului dat, un sistem echivalent reprezentat în fig. 52 b. Astfel, ajungem la un sistem de grindă, ale cărei deplasări se pot stabili uşor prin metoda greutăţilor elastice.[2)]

Vom determina numai deplasarea punctului k, deci vom calcula numai sarcina elastică W_k pentru secţiunea dată cu coordonatele x_k şi y_k.

Intr'un arc parabolic, sarcina uniform distribuită pe toată deschiderea arcului nu va provoca în secţiunile arcului nici momente încovoietoare şi nici forţe tăietoare, iar efortul normal în secţiunea x va fi:

$$N_x = \frac{H}{\cos \varphi_x}$$

în care H este împingerea,

φ_x — unghiul de înclinare al tangentei în secţiunea x faţă de orizontală.

La încovoierea arcului după curba indicată punctat în fig. 52 a, momentul încovoietor într'o secţiune oarecare a arcului se va exprima astfel:

$$M_x = N_x \cdot w_x$$

în care w_x este deplasarea secţiunii în direcţia normalei K faţă de axa arcului.

Astfel

$$M_x = \frac{H}{\cos \varphi_x} \cdot w_x \qquad (82)$$

Pentru calculul sarcinii elastice vom considera că raportul $\frac{w_x}{\cos \varphi_x}$ variază în lungul axei arcului după o parabolă de gradul al doilea.

Să presupunem că vârful acestei parabole se găseşte în punctul k cu coordonatele x_k şi y_k.

[1)] A. N. Dinnik: „Stabilitatea arcelor" 1947.
[2)] I. P. Procofiev: „Statica construcţiilor" 1947, partea I. § 18.

Scanned with OKEN Scanner

Inlocuim (numai pentru calculul sarcinii elastice) bara curbă cu o bară cu contur frânt, după cum se arată în fig. 53. Folosind cele două diagrame ale momentelor din încărcare (fig. 53 a) și din sarcina unitară corespunzătoare sarcinii elastice (fig. 53 b), se poate determina

$$W_k = \int \frac{M_p \overline{M}_k}{EI} ds.$$

Inmulțind prin procedeele obișnuite aceste diagrame și ținând seamă de faptul că distanța până la centrul de greutate al diagramei de încărcare de pe fiecare bară este $\frac{5}{8} S$, obținem

$$W_k = \frac{\omega_1}{EI} \frac{5}{8} + \frac{\omega_2}{EI} \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \frac{\Omega}{EI}.$$

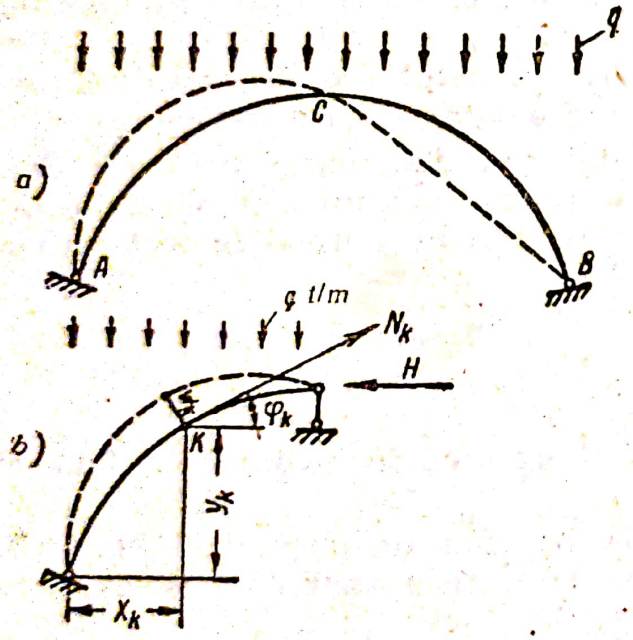


Fig. 52

Suprafața diagramei de încărcare Ω se determină prin următoarea expresie:

$$\Omega = \frac{2}{3} S M_{max} = \frac{2}{3} S \frac{H}{\cos \varphi_k} w_k$$

în care S este lungimea jumătății arcului măsurată pe axa lui.

Substituind valoarea lui Ω în formula sarcinii elastice, obținem:

$$W_k = \frac{5\ SH\ w_k}{12 \cos \varphi_k\ EI} \qquad (83)$$

Construcția fictivă este reprezentată în fig. 54. Conform acestei figuri, momentul fictiv este

$$M_{kf} = R_f \left(\frac{l}{2} - x_k \right);$$

în care R_f este reacțiunea dată de sarcina W_k în punctul C, egală cu

$$R_f = \frac{W_k\ r_k}{\left(\frac{l}{2}\right)}$$

Prin urmare

$$M_{kf} = W_k \cdot \frac{r_k}{l} (l - 2x_k).$$

Brațul de pârghie r_k se determină prin coordonatele x_k și y_k

$$r_k = x_k \cos \varphi_k + y_k \sin \varphi_k \qquad (84)$$

$$w_k = W_k \cos \varphi_k (x_k + y_k \operatorname{tg} \varphi_k) \left(1 - 2\frac{x_k}{l}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Substituind în această formulă valoarea sarcinii W_k (83) obținem

$$w_k = \frac{5\ SH}{12\ EI}\ (x_k + y_k \operatorname{tg} \varphi_k)\ \left(1 - 2\frac{x_k}{l}\right) w_k ,$$

de unde

$$\left[\frac{5\ SH}{12\ EI}\ (x_k + y_k \operatorname{tg} \varphi_k)\left(1 - 2\frac{x_k}{l}\right) - 1\right] w_k = 0 . \qquad (85)$$

Sunt posibile două cazuri :

1) $w_k = 0$, cazul echilibrului stabil ;

2) $w_k \neq 0$, cazul echilibrului nestabil.

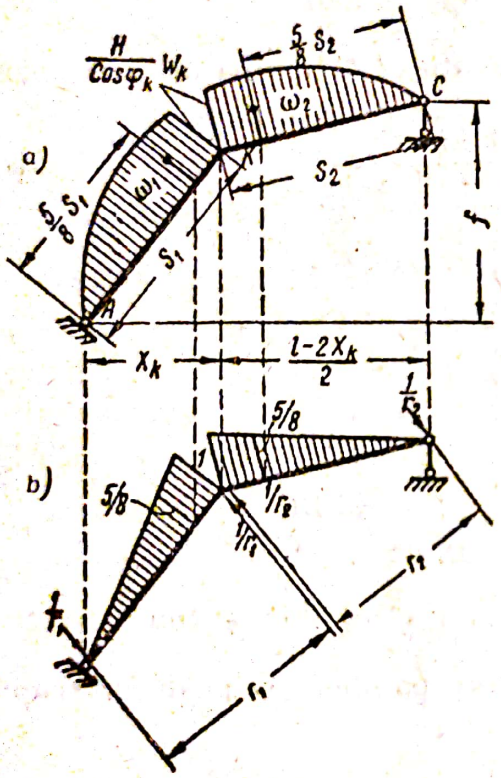


Fig. 53

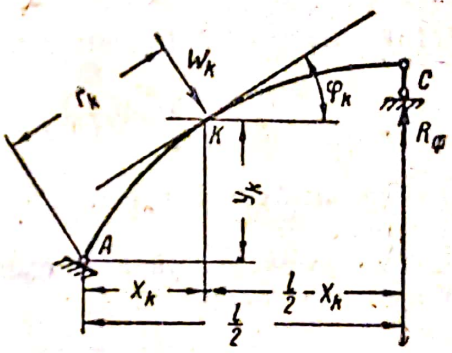


Fig. 54

Al doilea caz se poate realiza cu condiția ca expresia din parantezele mari (cu cârlige) să fie egală cu zero ; din această condiție rezultă ecuația caracteristică :

$$\frac{5\ SH}{12\ EI}\ (x_k + y_k \operatorname{tg} \varphi_k)\ \left(1 - 2\frac{x_k}{l}\right) = 1$$

de unde

$$H_{cr} = \frac{12\ EI}{5\ S\ (x_k + y_k \operatorname{tg} \varphi_k)\left(1 - 2\frac{x_k}{l}\right)} \qquad (86)$$

Ne mai rămâne să stabilim valoarea coordonatelor punctului k. Poziția punctului k trebue să fie astfel aleasă, încât să împartă în două, lungimea jumătății arcului, întrucât aproximativ în acest punct deviația k va fi maximă.

Pentru arcele pleoștite se poate admite aproximativ că

$$x_k = \frac{l}{4}$$

deci

$$y_k = \frac{3}{4} f;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = \frac{l}{4}} = 2 \frac{f}{l}$$

Substituirea acestor valori în ecuația (86) ne va da următoarea expresie

$$H_{cr} = \frac{96\ EI}{5\ Sl\ (1 + 6\ m^2)} \tag{87}$$

în care

$$m = \frac{f}{l}$$

Ținând seamă că:

$$H_{cr} = \frac{q_{cr}\ l^2}{8\ f}$$

și înlocuind $S = l\bar{S}$, obținem

$$q_{cr} = \frac{307{,}2\ m}{(1 + 6\,m^2)\ 2\bar{S}} - \frac{EI}{l^3} \tag{88}$$

In această expresie $2\bar{S}$ este lungimea arcului având $l = 1$ și $f = m$.

Valoarea exactă a lungimii unui arc parabolic se poate determina cu ajutorul formulei:

$$2\bar{S} = \frac{1}{2}\sqrt{1+16\,m^2} + \frac{1}{8m} \ln\left[4m + \sqrt{1+16\,m^2}\right] \tag{89}$$

Această lungime poate să fie determinată și aproximativ ca suma coardelor $2\ (S_1 + S_2)$ (fig. 53 a):

$$2\bar{S} = \frac{2}{l}\left[\sqrt{x_k^2 + y_k^2} + \sqrt{\left(\frac{l}{2} - x_k\right)^2 + (f - y_k)^2}\right] \tag{90}$$

In cazul particular al arcelor pleoștite $\left(\frac{f}{l} < \frac{1}{3}\right)$ se poate admite:

$$x_k = \frac{l}{4}; \qquad y_k = \frac{3}{4} f$$

Atunci

$$2\bar{S} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + 9\ m^2} + \sqrt{1 + m^2}\right] \tag{91}$$

Scanned with OKEN Scanner

Formula (88) poate să fie reprezentată și sub forma expresiei (81):

$$q_{cr} = K \frac{EI}{l^2} \tag{92}$$

Atunci coeficientul de stabilitate se determină prin formula

$$K = \frac{307{,}2\ m}{(1 + 6\ m^2)\ 2\bar{S}} \tag{93}$$

Formula (93) dă rezultate destul de exacte pentru arcele pleoștite cu raportul $\frac{f}{l} \leqslant \frac{1}{2{,}5}$. Pentru raportul $\frac{f}{l} > \frac{1}{2{,}5}$ diferența se mărește odată cu creșterea lui $\frac{f}{l}$ și pentru $\frac{f}{l} = 1$ atinge o valoare considerabilă.

Pentru ca să obținem o formulă comodă pentru oricare valoare a raportului $\frac{f}{l}$, trebue să introducem în formula (86), în locul lui x_k, o astfel de valoare, la care jumătatea arcului să fie împărțită prin punctul k în două părți egale.

Din fig. 53 a pentru acest caz corespunde

$$S_1 = S_2$$

sau

$$\sqrt{x_k^2 + y_k^2} = \sqrt{\left(\frac{l}{2} - x_k\right)^2 + (f - y_k)^2}$$

Rezolvând această ecuație în raport cu x_k obținem

în care

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \alpha\ \beta\ l \\ \alpha &= \frac{8\ m^2 + 1}{16\ m^2} \\ \beta &= 1 - \sqrt{1 - \frac{m^2 + 0{,}25}{8\ m^2\ \alpha^2}} \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Admițând ca și pentru un arc pleoștit, $S = l\bar{S}$ și substituind în ecuația (86) valoarea lui x_k din expresia (94) obținem:

$$q_{cr} = K \frac{EI}{l^3} \tag{95}$$

în care

$$K = \frac{19{,}2\ m}{\alpha\beta\ (1 - 2\alpha\beta)\ [1 + 16\ m^2\ (1 - 2\alpha\beta)\ (1 - \alpha\beta)]\ \bar{S}} \tag{96}$$

Pentru a ușura folosirea formulei (96) sunt date în tabloul 7 lungimile semi-axei arcului cu $l = 1$ și $f = m$.

Tabloul 7

m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
$\bar{S}$	0,513	0,550	0,603	0,668	0,740	0,818	0,985	1,162

Formula (96)[1] dă valori mai exacte pentru K decât formula (93). În tabloul 8 sunt date valorile exacte ale lui K, obținute de către A. N. Dinnik, în comparație cu valorile aproximative, calculate cu formula (96).

Tabloul 8

Valorile lui K \ m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
După Dinnik	28,5	45,4	46,5	43,9	38,4	30,5	20,0	14,10
După formula (96)	28,2	44,7	47,6	43,0	36,8	30,6	21,2	15,0
eroarea în %	1,1	1,5	2,4	2,1	4,2	0,3	6,0	6,4

Valorile exacte indicate în tabloul 8, sunt obținute prin integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale ale echilibrului.

Din tabloul 8 rezultă că valorile coeficienților K, obținute prin calculele exacte și din formula (96) sunt destul de apropiate, deci putem recomanda pentru calcule utilizarea formulei (96).

§ 17. Stabilitatea formei simetrice de deformație a arcelor parabolice

Când un arc este solicitat de o sarcină concentrată P aplicată în mijlocul deschiderii, arcul va suferi o deformație simetrică.

La o anumită valoare a lui $P = P_{cr}$, forma de deformație simetrică își pierde stabilitatea iar arcul capătă o deformație suplimentară, antisimetrică, după cum se arată în fig. 55.

Vom aplica pentru determinarea forței critice metoda grafo-analitică.

În cazul acțiunii unei forțe concentrate, curba de presiune se transformă într'un triunghiu de presiune $AC'B$ (fig. 56).

Rezultanta R a reacțiunilor la una din extremitățile arcului formează unghiul φ_0 cu orizontala

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{V_a}{H} = \frac{P}{2H} \qquad (97)$$

[1] Formula (96) a fost stabilită de către A. F. Smirnov „Stabilitatea statică și dinamică a construcțiilor" 1947, pag. 139—141.

Scanned with OKEN Scanner

Notăm cu μ raportul între împingerea H_0 a unui arc cu trei articulaţii şi împicgerea H a unui arc cu două articulaţii.

$$\frac{H_0}{H} = \mu \tag{98}$$

Atunci

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{P\ \mu}{2\ H_0} = \frac{2\ f}{l}\mu = 2\ m\ \mu \tag{99}$$

în care

$$m = \frac{f}{l}$$

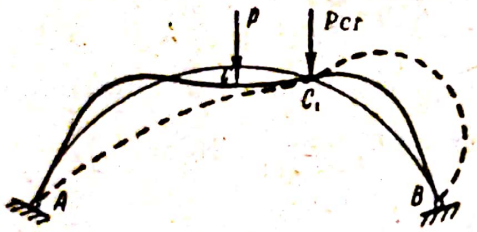


Fig. 55

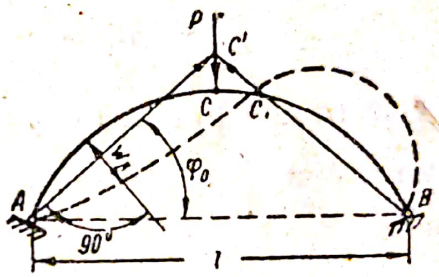


Fig. 56

Pentru deplaşări mici variaţia momentului într'o secţiune oarecare în cazul de faţă se determină prin expresia

$$M_x = Rw_x = \frac{H}{\cos \varphi_0} \cdot w_x \tag{100}$$

în care: $R = \dfrac{H}{\cos \varphi_0}$ este o valoare constantă,

w_x — deplasarea secţiunii x în direcţia normalei la curba de presiune (fig. 56).

Formula (100) este asemănătoare cu expresia (82) a momentului pentru un arc cu două articulaţii încărcat cu o sarcină uniform distribuită, având numai în locul unghiului φ_x unghiul φ_0; deci expresia (83) a sarcinii elastice pentru acest caz va avea următoarea formă:

$$W_k = \frac{5\ SHw_k}{12 \cos \varphi_0} \frac{1}{EI} \tag{101}$$

In cazul de faţă construcţia fictivă (fig. 57) coincide cu construcţia pentru cazul încărcării uniform distribuite, în care unghiul φ_k al direcţiei de acţiune a sarcinii W se schimbă deasemenea cu unghiul φ_0. Deci operaţiile care urmează pentru rezolvare coincid întocmai cu acelea pentru un arc încastrat la extremităţi încărcat cu o sarcină uniform repartizată.

Prin urmare, în locul formulei (86) vom obține

$$H_{cr} = \frac{12\,EI}{5\,S\,(x_k + y_k\,\mathrm{tg}\,\varphi_0)\left(1 - 2\frac{x_k}{l}\right)} \tag{102}$$

Pentru arcele pleoștite cu $\frac{f}{l} \leqslant \frac{1}{5}$ putem obține o exactitate absolut suficientă în ipoteza că $x_k = \frac{l}{4}$. Atunci, ținând seama de expresia (99) transformăm formula (102) astfel

$$H_{cr} = \frac{96\,EI}{5\,Sl\,(1 + 6\,m^2\,\mu)} \tag{103}$$

Substituind în această expresie $S = \bar{S}l$ (în care $\bar{S}$ este lungimea arcului având $l = 1$ și $f = m$) precum și $H = \frac{H}{H_0} \cdot H_0 = \frac{Pl}{4f\mu}$ obținem

$$P_{cr} = \frac{307{,}2\,m\,\mu}{2\,(1 + 6m^2\,\mu)\,2\,\bar{S}} \cdot \frac{EI}{l^2} \tag{104}$$

Raportul $\frac{H_0}{H}$ între împingerile corespunzătoare la sarcina P așezată la cheia arcului, este egal cu raportul ordonatelor maxime ale liniei de influență pentru împingerea arcelor cu două și trei articulații.

$$\mu = \frac{H_0}{H} \approx \frac{0{,}25}{0{,}20} = 1{,}25. \tag{105}$$

Să comparăm încărcarea critică obținută pentru un arc cu două articulații încărcat pe toată deschiderea cu sarcini uniform distribuite [a se vedea formula (88)].

$$(ql)_{cr} = \frac{307{,}2\,m}{(1 + 6\,m^2)\,2\,\bar{S}} \cdot \frac{EI}{l^2} \tag{106}$$

cu sarcina critică P_{cr} (104).

Din această comparație rezultă, că încărcarea totală $(ql)_{cr}$ este aproape de două ori mai mare decât forța P_{cr}.

Comparând împingerile critice pentru aceste două cazuri

$$H_{q(cr)} = \frac{ql^2}{8f} = \frac{307{,}2}{8\,(1+6m^2)\,2\bar{S}}\frac{EI}{l^2} \tag{107}$$

$$H_{p(cr)} = \frac{Pl}{4f\mu} = \frac{307{,}2}{8\,(1+6\,m^2\mu)\,2\bar{S}}\frac{EI}{l^2} \tag{108}$$

observăm că valorile lor sunt foarte apropiate.

Scanned with OKEN Scanner

A doua expresie diferă de prima numai prin factorul μ din paranteza numitorului.

Să examinăm acum cazul unei încărcări parțiale a arcului, după cum se arată în fig. 58.

Pentru acest caz este valabilă formula (102)

$$H_{cr} = \frac{12\ EI}{5\ S\ (x_k + y_k \cdot \operatorname{tg} \varphi_k)\left(1 - \frac{2x_k}{l}\right)} \tag{109}$$

însă în această expresie

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{Q_k}{H_0}\mu \tag{110}$$

în care Q_k este forța tăietoare a grinzii echivalente,

H_0 — împingerea arcului cu trei articulații provenită din încărcarea dată.

μ — raportul între împingerile din încărcarea dată.

$$\mu = \frac{H_0}{H}. \tag{111}$$

Pentru arcele pleoștite, admițând că $x_k = \frac{l}{4}$, obținem

$$H_{cr} = \frac{96\ EI}{5\ Sl\ (1 + 3m \operatorname{tg} \varphi_k)}. \tag{112}$$

Mai departe trebue să examinăm două cazuri: când $z < \frac{l}{4}$ și $z > \frac{l}{4}$.

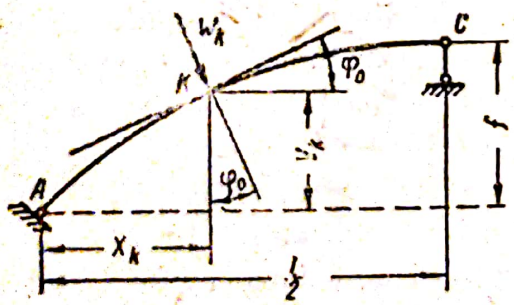


Fig. 57

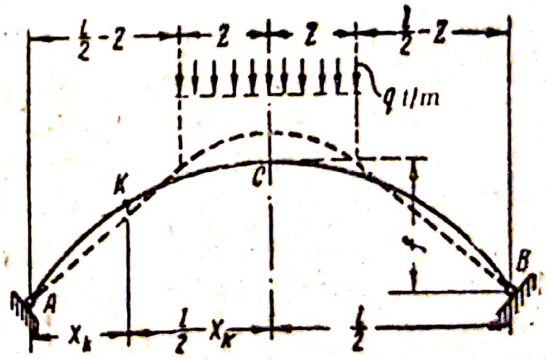


Fig. 58

Dacă notăm $\frac{2z}{l} = \eta$, atunci pentru cazul $z < \frac{l}{4}$ vom avea:

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{Q}{H_0}\mu = \frac{2\ m}{1 - \frac{1}{2}\eta}\mu \tag{113}$$

iar pentru cazul $z > \frac{l}{4}$

Scanned with OKEN Scanner

$$\operatorname{tg}\varphi_k = \frac{Q}{H_0}\mu = \frac{m}{\eta - \frac{1}{2}\eta^2}\mu. \qquad (114)$$

Astfel pentru împingerea critică vom obține două formule;

a) când $z < \frac{l}{4}$

$$H_{cr} = \frac{307{,}2}{8\left[1 + \frac{6\,m^2\mu}{\left(1 - \frac{1}{2}\eta\right)}\right]2\bar{S}} \cdot \frac{EI}{l^2} \qquad (115)$$

b) pentru $z > \frac{l}{4}$

$$H_{cr} = \frac{307{,}2}{8\left[1 + \frac{6m^2\mu}{2\left(\eta - \frac{1}{2}\eta^2\right)}\right]2\bar{S}} \cdot \frac{EI}{l^2} \qquad (116)$$

Dacă în formula (115) considerăm $\eta = 0$, vom obține expresia (108) pentru cazul unei forțe concentrate aplicată la cheia arcului. Dacă în expresia (116) presupunem $\eta = 1$, obținem formula (107) a împingerii în cazul încărcării întregii deschideri a arcului.

Observăm că variind în formulele (115) și (116) valorile lui η, obținem aproape aceleași valori ale împingerii critice.

In toate cazurile examinate mai sus de încărcare parțială a unui arc parabolic, valoarea împingerii critice H_{cr} rămâne aproape constantă. De aceea la calculul la stabilitate a arcelor pleoștite este necesar să considerăm încărcarea care dă *împingerea maximă*.

Metoda pentru calculul stabilității arcelor, expusă mai sus, poate să fie extinsă și asupra arcelor cu secțiune variabilă. Insă în acest caz va fi nevoie să se calculeze câteva sarcini elastice. In afară de aceasta, ipoteza că raportul $\frac{w}{\cos\varphi}$ variază după o lege parabolică va da în acest caz o eroare foarte mare. Insă renunțarea la aceste simplificări complică mult calculele.

Problema se simplifică simțitor dacă pentru calculele numerice vom folosi metoda matriților.[1]

[1] A. F. Smirnov „Stabilitatea statică și dinamică a construcțiilor" 1947.

8) Pentru un inel circular cu o bară așezată după un diametru (la mijloc) (fig. 59) se cere : *a)* să se alcătuiască ecuația de stabilitate ; *b)* să se calculeze încărcarea critică pentru cazul $I_1 = 4\ I_0$.

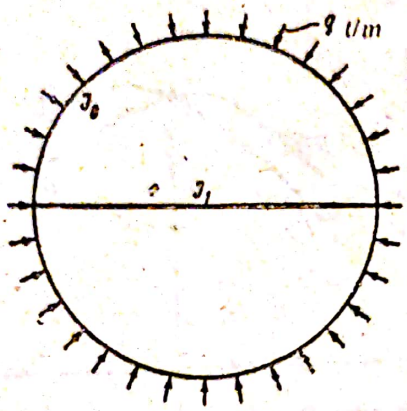


Fig. 59

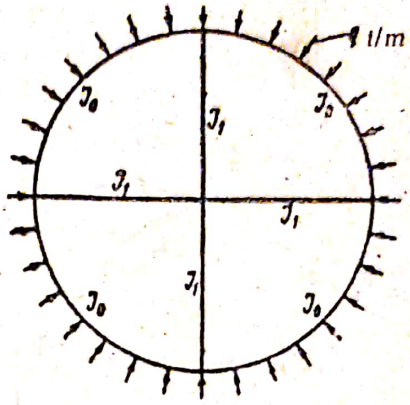


Fig. 60

Indicație. Fiecare jumătate a inelului trebue considerată ca un arc circular cu extremitățile încastrate elastic.

Răspuns : a) Ecuația caracteristică :

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi n}{2} = \frac{2(n^2 - 1)}{3n} \frac{I_0}{I_1}$$

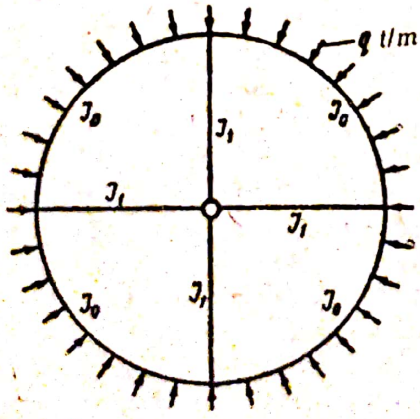


Fig. 61

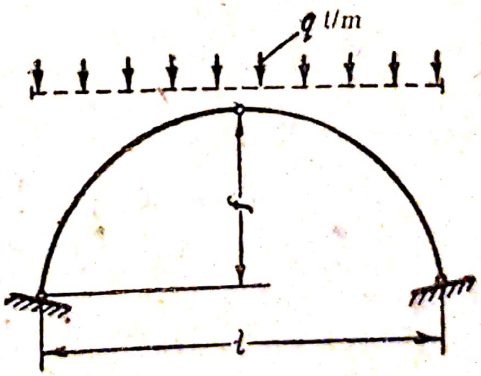


Fig. 62

b) Sarcina critică :

$$q_{cr} = 6{,}6 \frac{EI}{R^3}$$

9) Să se determine încărcarea critică q_{cr} pentru un inel de tunel supus la presiunea hidrostatică cu tipurile de sprijiniri arătate în fig. 60 și 61, considerând că $I_1 = 2\ I_0$.

Răspuns : Pentru ambele cazuri, sarcina critică este aceeaşi.

$$q_{cr} = 20{,}9\,\frac{EI}{R^3}$$

Ecuaţia caracteristică este :

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi n}{4} = \frac{n^2 + 2}{3n}$$

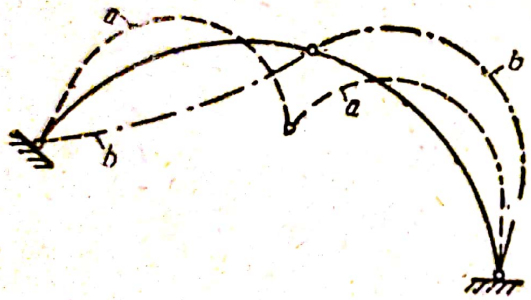


Fig 63

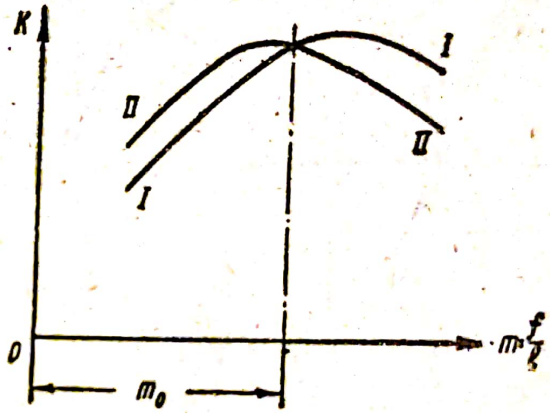


Fig. 64

10) Să se determine raportul între săgeată şi deschidere (m_0) pentru un arc parabolic cu trei articulaţii (fig. 62), la care deformaţia arcului după liniile *a* şi *b* (fig. 63) se produce la aceeaşi încărcare critică.

Indicaţie. Pentru rezolvarea problemei este necesar să se traseze două curbe ale coeficienţilor de stabilitate *K*, folosind ultimele două coloane ale tabloului 6. O diagramă de acest fel este reprezentată în fig. 64.

CAPITOLUL 4

STABILITATEA CADRELOR

§ 18. Ipoteze de calcul

Pentru cercetarea stabilității cadrelor plane, introducem următoarele ipoteze de calcul, care ne vor ușura determinarea forțelor critice:

1) Se consideră numai sarcinile concentrate la noduri, deci fără încovoierea barelor.

2) Barele cadrului se consideră indeformabile la compresiune și la întindere.

3) Distanțele între noduri după deformație se consideră egale cu acelea înainte de deformație, adică coardele care unesc extremitățile barelor deformate se presupun egale cu lungimile barelor înainte de deformație.

4) La calculul deplasărilor se iau în considerare eforturile de compresiune, care apar înainte de deformație și se neglijează sporirea eforturilor normale $\triangle N$ care apar în momentul pierderii stabilității.

5) La determinarea forțelor tăietoare în barele încovoiate, nu se ține seamă de variația unghiului de înclinare al secțiunii, datorită încovoierii barei respective.

Toate aceste ipoteze, în afară de primele două, se pot justifica prin faptul că în momentul pierderii stabilității toate deplasările sunt considerate ca fiind foarte mici.

In ceea ce privește prima ipoteză relativă la transmiterea sarcinilor în nodurile construcției, ar fi cazul să facem o comparație cu barele supuse la flambaj și anume: după cum la barele solicitate la flambaj nu poate avea loc un caz practic de solicitare perfect axială, tot astfel nici la cadre concentrarea sarcinilor în noduri nu poate fi exactă. Se cunoaște însă că încărcarea excentrică a unei bare drepte provoacă solicitări la încovoiere și la compresiune, iar la apropierea valorii sarcinii de valoarea ei critică, deformațiile cresc foarte repede. Același fenomen se produce și la cadre; dacă barele lor sunt supuse la flambaj, deformațiile care apar în barele cadrului cresc foarte repede, când valoarea forței se apropie de valoarea ei critică.

De aceea determinarea forțelor critice pentru barele cadrului încărcate cu sarcini ideale (axiale), este necesară pentru aprecierea stabilității deformațiilor produse de alte modalități de încărcare a cadrului.

Vom examina calculul cadrelor la stabilitate cu metoda forțelor și metoda deplasărilor (deformațiilor).

Scanned with OKEN Scanner

§ 19. Determinarea deplasărilor la barele comprimate

La aplicarea metodei forțelor pentru rezolvarea problemelor de stabilitate a cadrelor, trebue să se calculeze deplasările produse în sistem. După cum se știe, deplasările depind atât de încărcarea transversală cât și de cea axială

$$\Delta_{n\,(mp)} = f\,(Q,P)$$

Spre deosebire de determinarea deplasărilor prin metoda forțelor pentru calculele statice obișnuite, trebue ca la calculele de stabilitate, deformațiile să fie calculate ținând seama de deformațiile date de flambaj și de încovoiere.

Pentru deformații foarte mici, $\Delta_{n\,(mp)}$ este o funcțiune liniară de forțele transversale Q și o funcțiune neliniară de forțele axiale.

In cele ce urmează vom avea să ne ocupăm numai de forțe de compresiune apropiate ca valoare de cele critice, deci ne vom limita la luarea în considerare a unor forțe transversale foarte mici, față de care vom putea aplica teorema suprapunerii efectelor, precum și celelalte teoreme ale Staticii construcțiilor.

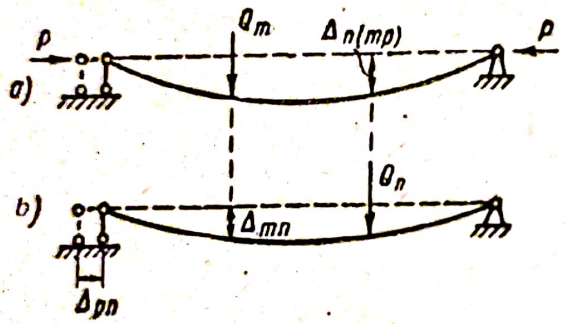


Fig. 65

In fig. 65 este înfățișată o grindă supusă la încovoiere în stare reală și fictivă. Folosind principiul reciprocității lucrului mecanic și păstrând notațiile din cursul de Statica construcțiilor, putem să scriem:

$$Q_n\,\Delta_{n(mp)} = Q_m\,\Delta_{nm} + P\,\Delta \qquad (117)$$

Indicele (mp) înseamnă acțiunea simultană a forțelor transversale și axiale.

Inlocuind în expresia (117) membrul din dreapta prin expresia lucrului mecanic al eforturilor interioare, obținem

$$Q_n\,\Delta_{n(mp)} = \int \frac{M_n\,M_{(mp)}}{EI}\,ds + k\int \frac{Q_n\,Q_{(mp)}}{GF}\,ds + \int \frac{N_n\,N_{(mp)}}{EF}\,ds \qquad (118)$$

Pentru $Q_n = 1$ această expresie se va scrie astfel:

$$\Delta_{n(mp)} = \int \frac{\overline{M}_n\,M_{(mp)}}{EI}\,ds + k\int \frac{\overline{Q}_n\,Q_{(mp)}}{GF}\,ds + \int \frac{\overline{N}_n\,N_{(mp)}}{EF}\,ds \qquad (119)$$

Pentru ca să calculăm momentul $M_{(mp)}$ și forțele $Q_{(mp)}$ și $N_{(mp)}$ este necesar să cunoaștem ecuația axei deformate, adică să cunoaștem deplasările provocate de forțele mp. Prin urmare, problema stabilirii

Scanned with OKEN Scanner

deplasărilor cu ajutorul formulei (119) este oarecum static nedeterminată.

Pentru rezolvarea ei să presupunem că cunoaştem ecuaţia axei deformate :

$$y = \Delta_{x(mp)} = f(x) \tag{120}$$

Atunci vom avea :

$$\frac{M_{(mp)}}{EI} = y'' = \Delta''_{x(mp)};$$

$$\frac{Q_{(mp)}}{EI} = y''' = \Delta'''_{x(mp)}; \tag{121}$$

$$N_{(mp)} = P(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} + Q_n y' = P(1 + \Delta'^2_{x(mp)})^{-\frac{1}{2}} + Q_n \Delta'_{x(mp)}.$$

Substituind aceste valori în expresia (119) obţinem

$$\Delta_{n(mp)} = \int \Delta''_{x(mp)} \overline{M}_n \, ds + k \int \Delta'''_{x(mp)} \frac{EI\overline{Q}_n}{GF} \, ds +$$

$$+ \int [1 + \Delta'^2_{x(mp)}]^{-\frac{1}{2}} \frac{\overline{N}_n}{EF} \, ds + \int \frac{Q_m \overline{N}_n}{EF} \Delta'_{x(mp)} \, ds. \tag{122}$$

Rezolvarea acestei ecuaţii este destul de complicată, însă ea poate fi simţitor simplificată prin condiţia că fiecare bară a cadrului comprimată de sarcinile din noduri este încărcată numai cu momentele în noduri.

Ca şi în cazul calculului static al cadrelor, vom determina deplasările ţinând seama numai de prima integrală a ecuaţiei (119)

$$\Delta_{n(mp)} = \int \Delta''_{x(mp)} \overline{M}_n \, ds = \int \frac{\overline{M}_n M_{(mp)}}{EI} \, ds. \tag{123}$$

Pentru rezolvarea acestei ecuaţii vom utiliza ecuaţia suplimentară a încovoierii unei bare drepte :

$$EI \, \Delta''_{x(mp)} + P \, \Delta_{x(mp)} + M_{o(x)} = 0, \tag{124}$$

în care $M_{o(x)}$ este momentul într'o secţiune oarecare produs de încărcarea transversală.

La rezolvarea problemelor în legătură cu stabilitatea cadrelor vom avea de rezolvat astfel de cazuri în care flambajul diferitelor elemente ale cadrului apare numai datorit momentelor dela extremităţile barelor (din noduri). De aceea $M_{o(x)}$ va fi întotdeauna o funcţiune liniară, prin urmare derivata a doua a lui va fi egală cu zero.

Calculând derivata a doua a ecuaţiei (124) obţinem :

$$EI \, \Delta^{IV}_{x(mp)} + P \, \Delta''_{x(mp)} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinând seama de prima egalitate (121) obţinem :

$$\frac{d^2 M_{(mp)}}{dx^2} + \frac{P}{EI} M_{(mp)} = 0 . \tag{125}$$

Integrala acestei ecuaţii va fi

$$M_{(mp)} = A \cos nx + B \sin nx \tag{126}$$

în care

$$n = \sqrt{\frac{P}{EI}} . \tag{127}$$

Substituind valoarea momentului (126) în formulele (119) şi (123) obţinem :

$$EI \, \Delta_{n(mp)} = \int (A \cos nx + B \sin nx) \, \overline{M}_n \, dx . \tag{128}$$

§ 20. Regulile pentru calculul integralelor pentru cazurile elementare

In cazul când la determinarea deplasărilor una dintre diagramele momentelor care serveşte la calculul integralelor pentru formula (128) (la încovoiere simplă), este liniară, se foloseşte metoda „înmulţirii diagramelor“ [1]. In paragraful de faţă vom demonstra că acelaş procedeu este aplicabil, cu unele modificări, şi în cazul când bara este supusă la compresiune şi la încovoiere.

Vom considera cazurile care ne vor fi necesare pentru calculul stabilităţii cadrelor.

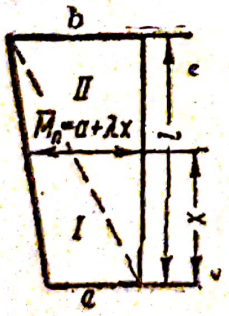


Fig. 66

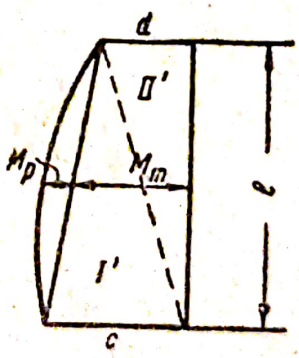


Fig. 67

Diagrama momentelor M_n date de încărcarea unitară va fi întotdeauna liniară, iar momentul într'o secţiune oarecare poate fi reprezentat prin următoarea ecuaţie (fig. 66)

$$\overline{M}_n = a + \lambda \, x \tag{129}$$

în care

$$\lambda = \frac{b - a}{l} \tag{130}$$

[1] I. P. Procofiev : „Statica construcţiilor“ 1947 vol. I. § 84.

a şi b sunt momentele dela extremităţile porţiunii considerate, de lungime l.

Substituind expresia (129) în formula (128) obţinem:

$$EI\,\Delta_{n(mp)} = \int_0^l (A\cos nx + B\sin nx)\cdot(a+\lambda x)\,dx =$$

$$= \frac{a}{n}A\sin nl - \frac{a}{n}B\,(\cos nl - 1) + \lambda A\int_0^l x\cos nx\,dx + \lambda B\int_0^l x\sin nx\,dx$$

Integralele care intră în această formulă se calculează astfel:

$$\int_0^l x\cos nx\,dx = \left|\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x\sin nx}{n}\right|_0^l = \frac{\cos nl - 1}{n^2} + \frac{l\sin nl}{n}$$

şi

$$\int_0^l x\sin nx\,dx = \left|\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x\cos nx}{n}\right|_0^l = \frac{\sin nl}{n^2} - \frac{l\cos nl}{n}.$$

După substituire obţinem

$$EI\,\Delta_{n(mp)} = A\left[\frac{b}{n}\sin nl + \frac{\lambda}{n^2}(\cos nl - 1)\right] +$$

$$+ B\left[\frac{a}{n} + \frac{\lambda}{n^2}\sin nl - \frac{b}{n}\cos nl\right] \qquad (131)$$

Constantele de integrare A şi B se determină din condiţiile dela extremităţile diagramei de încărcare a momentelor $M_{(mp)}$.

Să presupunem că diagrama de încărcare (fig. 67) este alcătuită din două diagrame şi anume: diagrama M_p provenită din acţiunea forţei axiale datorită flambajului barei şi diagrama M_m, provenită din momentele dela extremităţile barei c şi d.

In consecinţă:

$$M_{(mp)} = M_p + M_m$$

Să considerăm acum două cazuri care vor fi suficiente pentru scopul ce urmărim.

a) Bara articulată la capete

Conform fig. 67, avem următoarele condiţii limită:

când $x = 0$ $\quad M_{(mp)} = c$

când $x = l$ $\quad M_{(mp)} = d$

Aplicând aceste condiţii la ecuaţia (126) obţinem:

$$A = c; \quad B = \frac{d - c\cos nl}{\sin nl} \qquad (132)$$

Scanned with OKEN Scanner

Având o bară cu rigiditate constantă și substituind valorile de mai sus în formula (131) obținem :

$$EI\,\Delta_{n(mp)} = \frac{bc}{n}\sin nl + \frac{\lambda c}{n^2}(\cos nl - 1) + \frac{ad}{n}\frac{1}{\sin nl} +$$

$$+ \frac{\lambda d}{n^2} - \frac{bd}{n}\frac{\cos nl}{\sin nl} - \frac{ac}{n}\frac{\cos nl}{\sin nl} - \frac{\lambda c}{n^2}\cos nl + \frac{bc}{n}\frac{\cos^2 nl}{\sin nl}$$

Inlocuind $\lambda = \frac{b-a}{l}$, însumând termenii asemenea și introducând o notație nouă

$$v = nl = l\sqrt{\frac{P}{EI}} \tag{133}$$

obținem ;

$$EI\,\Delta_{n(mp)} = \left(\frac{acl}{3} + \frac{bdl}{3}\right)\alpha(v) + \left(\frac{adl}{6} + \frac{bcl}{6}\right)\beta(v), \tag{134}$$

în care

$$\left.\begin{aligned}\alpha(v) &= \frac{3}{v}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{tg} v}\right)\\ \beta(v) &= \frac{6}{v}\left(\frac{1}{\sin v} - \frac{1}{v}\right)\end{aligned}\right\} \tag{135}$$

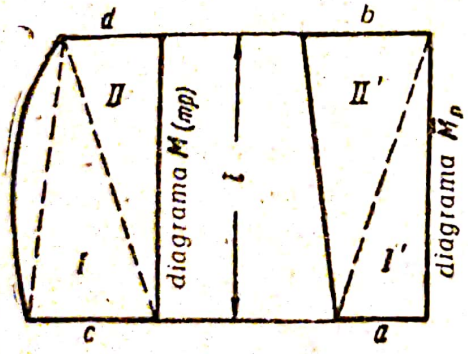


Fig. 68

Formula (134) stabilește o regulă pentru determinarea deplasărilor prin înmulțirea a două diagrame.

Se înmulțesc numai trapezele diagramelor momentelor M_m *și* $\overline{M}_n$ *date de încărcarea transversală, fără a ține seama de diagrama* M_p, *provenită din acțiunea forței axiale, a cărei influență este reprezentată prin factorii* $\alpha(v)$ *și* $\beta(v)$. Inmulțirea trapezelor se efectuează prin înmulțirea triunghiurilor omogene [1] $I \times I'$ și $II \times II'$ (fig. 68) cu corecțiunea factorului $\alpha(v)$ și a triunghiurilor neomogene $I \times II'$ și $II \times I'$ cu corecțiunea factorului $\beta(v)$.

b) Bara încastrată la un capăt

Fig. 69 reprezintă o bară încastrată la un capăt, încărcată cu forța axială P și cu o serie de sarcini transversale Q_m, sub formă de momente și de forțe. In partea din dreapta a figurii se vede curba momentelor care se compune din diagrama dată de sarcinile transversale

[1] Vom denumi triunghiuri omogene, acele triunghiuri ale căror laturi sunt îndreptate în aceeași direcție iar triunghiuri neomogene, acelea la care baza triunghiului dintr'o diagramă corespunde cu vârful triunghiului din cealaltă diagramă.

Scanned with OKEN Scanner

cu ordonata inferioară egală cu c, precum și din diagrama dată de forța P, având ordonata inferioară $P\delta_0$, în care δ_0 este deplasarea capătului superior al barei.

Valoarea lui δ_0 depinde atât de forța P cât și de valoarea forțelor Q_m. Pentru ca să nu calculăm de fiecare dată valoarea lui δ_0, vom căuta să o eliminăm din formula de „înmulțire" a diagramelor, exprimând rezultatul înmulțirii prin P, c și d.

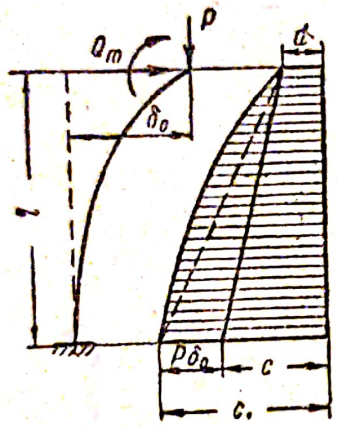


Fig. 69

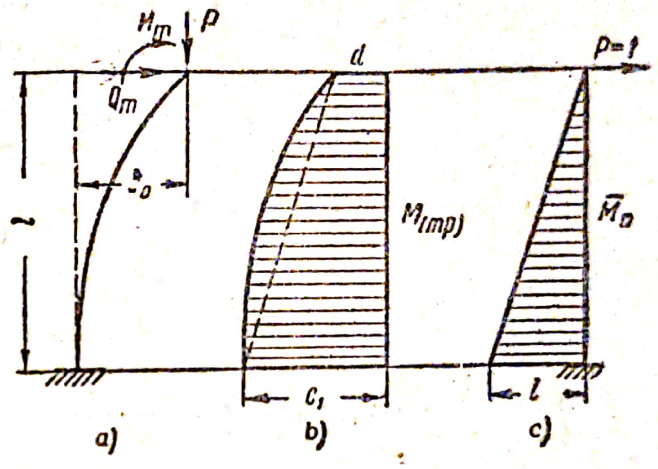


Fig. 70

Notăm $$c_1 = c + P\delta_0 \qquad (136)$$

și transformăm diagrama care rezultă într'o diagramă de formă trapezoidală $M_{(mp)}$ (fig. 70 b), astfel încât putem să aplicăm formula (134). In fig. 70 c este înfățișată diagrama lui $\overline{M}_n$, provenită din forța $P = 1$.

Efectuând înmulțirea diagramelor lui $\overline{M}_n$ și M_{mp} după formula (134) obținem:

$$EI\,\delta_0 = \frac{c_1 l^2}{3}\alpha(v) + \frac{dl^2}{6}\beta(v)$$

Substituind în formula (136) expresia obținută pentru δ_0 și valoarea lui $P = \frac{v^2 EI}{l^2}$, vom obține:

$$c_1 = c + P\cdot\delta_0 = c + \frac{v^2}{l^2}\left[c_1\frac{l^2}{3}\alpha(v) + \frac{dl^2}{6}\beta(v)\right]$$

de unde găsim

$$c_1 = \frac{1}{1 + \frac{v^2}{3}\alpha(v)}\left[c + \frac{v^2 d}{6}\beta(v)\right]$$

Primul factor din membrul al doilea al acestei expresii, va căpăta după substituirea valorii $\alpha(v)$ (135), următoarea formă:

$$\frac{1}{1 + \frac{v^2}{3}\alpha(v)} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{3}\cdot\frac{3}{v}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{tg} v}\right)} = \frac{\operatorname{tg} v}{v}$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încât

$$c_1 = \frac{\operatorname{tg} v}{v} c + \frac{v^2 d}{6} \frac{\operatorname{tg} v}{v} \beta(v) \tag{137}$$

Acum putem să folosim formula (134), substituind în ea valoarea lui c_1 (137);

$$EI\,\Delta_{n(mp)} = \left\{ \frac{acl}{3} \frac{\operatorname{tg} v}{v} + \frac{al}{3} \frac{v^2 d}{6} \frac{\operatorname{tg} v}{v} \beta(v) + \frac{bdl}{3} \right\} \alpha(v) +$$

$$+ \left\{ \frac{adl}{6} + \frac{blc}{6} \frac{\operatorname{tg} v}{v} + \frac{bl}{6} \frac{v^2 d}{6} \frac{\operatorname{tg} v}{v} \beta(v) \right\} \beta(v)$$

După mici transformări, această expresie capătă următoarea formă:

$$EI\,\Delta_{n(mp)} = \frac{acl}{3} \theta_1(v) + \frac{bdl}{3} \theta_2(v) + \left(\frac{adl}{6} + \frac{bcl}{6} \right) \theta_3(v) \tag{138}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} \theta_1(v) &= \frac{\operatorname{tg} v}{v} \alpha(v) = \frac{3}{v^2} \left[\frac{\operatorname{tg} v}{v} - 1 \right]; \\ \theta_2(v) &= \alpha(v) + \frac{v \operatorname{tg} v}{12} \beta^2(v) = \frac{3}{v^2} \left[1 + v \operatorname{tg} v - \frac{2}{\cos v} + \frac{\operatorname{tg} v}{v} \right]; \\ \theta_3(v) &= \frac{\operatorname{tg} v}{v} \beta(v) = \frac{6}{v^2} \left[\frac{1}{\cos v} - \frac{\operatorname{tg} v}{v} \right]; \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

Formula (138) arată că *la determinarea deplasărilor unei bare, încastrată la un capăt, trebue să ţinem seama de diagramele momentelor provenite numai din acţiunea încărcării transversale,* iar influenţa forţei de compresiune P este exprimată prin coeficienţii de corecţiune θ_1, θ_2 şi θ_3.

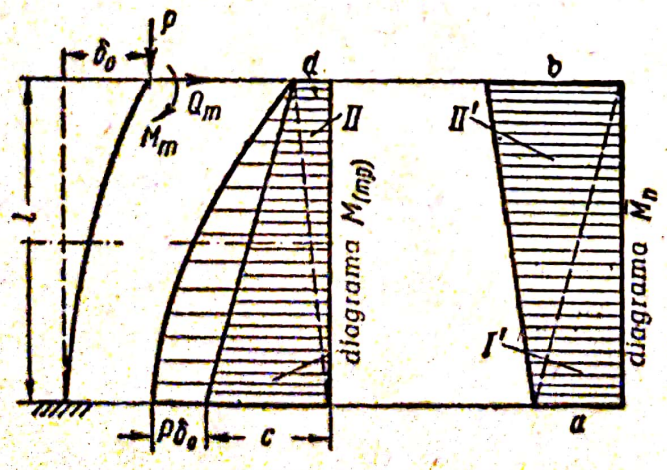


Fig. 71

Calculul deplasărilor se face prin înmulţirea triunghiurilor omogene $I \times I'$ şi $II \times II'$ cu coeficienţii de corecţiune $\theta_1(v)$ şi $\theta_2(v)$, precum şi a triunghiurilor neomogene $I \times II'$ şi $II \times I'$ cu coeficientul de corecţiune $\theta_3(v)$ (fig. 71).

Cele două cazuri pe care le-am examinat sunt absolut suficiente pentru a arăta aplicarea metodei forţelor la calculele de stabilitate.

In cele ce urmează, dăm câteva exemple de aplicare a formulelor obţinute pentru calculul deplasărilor la bare comprimate.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 1. *Să se determine unghiurile de rotire la bara comprimată, înfățișată în fig. 72 a, și care este solicitată de momentul M_B la reazimul din dreapta.*

In fig. 72 b, c și d sunt reprezentate diagramele momentelor și anume: a momentului din încărcare — M_m, construită numai pe baza momentului pe reazim, fără influența forței P, și două diagrame unitare $\overline{M}_1$ și $\overline{M}_2$. Pentru ca să determinăm pe $\varphi_{1(mp)}$ înmulțim diagramele lui M_m și M_1 și introducem coeficientul de corecțiune $\beta\ (v)$, (deoarece cele două triunghiuri sunt neomogene).

$$\varphi_{1(mp)} = \frac{M_B l}{2EI}\,\frac{1}{3}\,\beta\ (v) = \frac{M_B l}{6\ EI}\cdot\frac{6}{v}\cdot\left(\frac{1}{\sin v} - \frac{1}{v}\right)$$

In calculul lui $\varphi_{2(mp)}$ introducem coeficientul de corecțiune $\alpha(v)$ (întrucât triunghiurile sunt omogene):

$$\varphi_{2(mp)} = \frac{M_B l}{2\ EI}\cdot\frac{2}{3}\,\alpha\ (v) = \frac{M_B l}{3\ EI}\cdot\frac{3}{v}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{tg} v}\right).$$

Exemplul 2. *Să se determine deformația unei console supusă la compresiune sub acțiunea unei forțe Q_m, aplicată la capătul ei (fig. 73 a).*

Folosind formula (138) și înmulțind diagramele lui $M_{(mp)}$ și $\overline{M}_1$ (fig. 73 b și c) găsim:

$$\Delta_{1(mp)} = \frac{Q_m\ l\cdot l}{2\ EI}\,\frac{2}{3}\,l\ \theta_1\ (v) = \frac{Q_m l^3}{3\ EI}\ \theta_1\ (v) =$$

$$= \frac{Q_m l^3}{3\ EI}\cdot\frac{3}{v}\left[\frac{\operatorname{tg} v}{v} - 1\right]$$

Observăm că pentru $P = 0$, $v = 0$, $\theta_1\ (v) = 1$, astfel încât deformația consolei datorită sarcinii concentrate Q_m, este:

$$\lim_{v\to 0}\frac{3}{v^2}\left(\frac{\operatorname{tg} v}{v} - 1\right) = 1$$

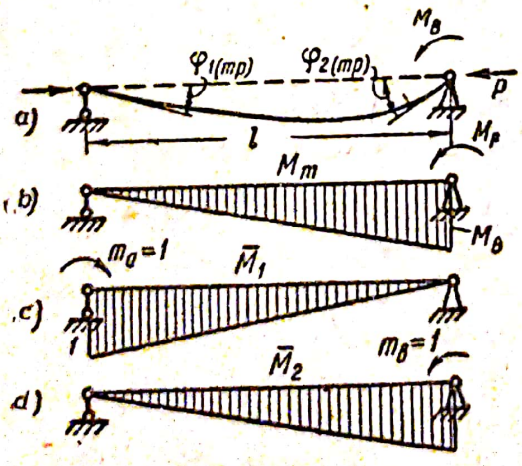


Fig. 72

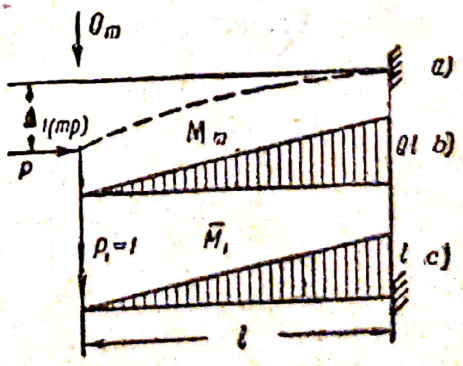


Fig. 73

Exemplul 3. *Să se determine deplasarea orizontală a punctului K al cadrului reprezentat în fig. 74 a. Diagramele unitare de încărcare sunt arătate în fig. 74 b și c.*

Dintre cele trei bare ale cadrului, una este intens solicitată la compresiune de către forța P; de aceea calculele pentru celelalte două bare se fac ca de obiceiu, fără introducerea coeficienților de corecțiune.

La înmulțirea diagramelor momentelor pentru bara *1—2* folosim formula (138) pentru cazul unei bare încastrate la un capăt. Diagrama momentelor are în acest caz, forma a două triunghiuri, reprezentate cu linii punctate în figură.

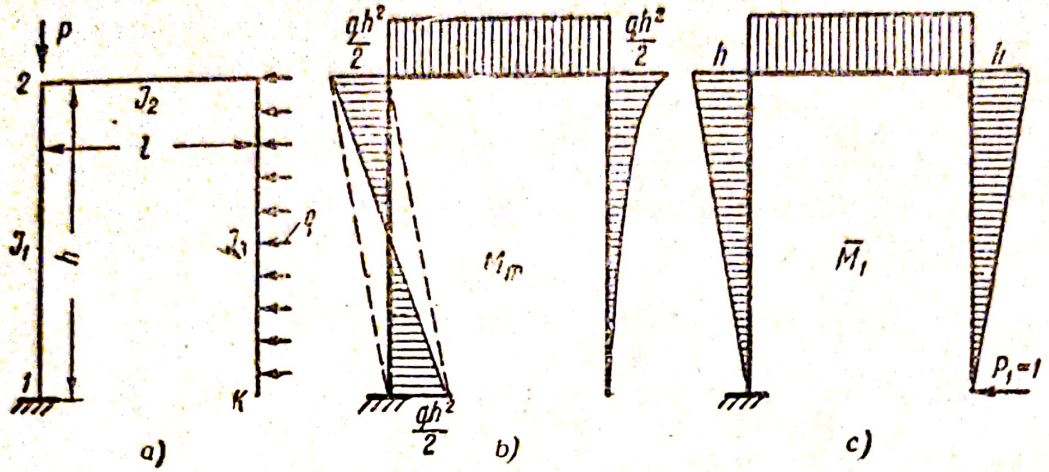


Fig. 74

Astfel găsim :

$$\Delta_{1\,(mp)} = -\frac{qh^2}{2}\,\frac{h}{2EI_1}\,\frac{1}{3}\,h\,\theta_3(v) + \frac{qh^2}{2}\,\frac{h}{2EI_1}\,\frac{2}{3}\,h\,\theta_2(v) + \frac{qh^2 l}{2EI_2}\,h +$$

$$+\frac{1}{3}\,\frac{qh^2}{2}\,\frac{h}{EI_3}\,\frac{3}{4}\,h = \frac{qh^4}{12\,EI_1}\left[2\theta_2(v) - \theta_1(v)\right] + \frac{qh^3 l}{2\,EI_2} + \frac{qh^4}{8\,EI_3}.$$

Determinând pentru valoarea dată a lui P valorile lui v, $\theta_2(v)$ și $\theta_3(v)$ este ușor să găsim pe $\Delta_{1\,(mp)}$.

§ 21. Alegerea sistemului de calcul și a necunoscutelor suplimentare

Trebue să remarcăm că din punct de vedere principial, orice sistem de calcul care satisface cerințele generale ce i se impun (a se vedea „Statica Construcțiilor" partea II), trebue să conducă la aceleași rezultate de calcul. In calculele de stabilitate însă diferența între sistemul de calcul potrivit și cel nepotrivit este mai accentuată, din care cauză calculul propriu-zis va fi sau simplu de tot, ori foarte complicat.

La calculul stabilității cadrelor importanța primordială o are simplicitatea calculului coeficienților pentru ecuațiile de condiție (canonice). Calculul acestor coeficienți va fi foarte simplu la sistemele de calcul, la care elementele comprimate vor fi reprezentate prin bare simplu rezemate, cu capetele articulate și fixe, sau prin bare încastrate la un capăt. In aceste cazuri se pot aplica pentru determinarea deplasărilor formulele deduse la § 20.

Vom examina o serie de exemple, în care se evidenţiază alegerea reuşită şi nereuşită a sistemelor de calcul.

Fig. 75 înfăţişează un cadru simplu, al cărui stâlp este comprimat de o forţă P. Cele trei sisteme de calcul posibile sunt reprezentate în fig. 76. Primul şi al doilea sistem se caracterizează prin aceea că stâlpul comprimat este considerat în ambele cazuri ca o bară simplă; în primul caz ca o bară articulată la capete şi fără deplasări la extremităţi, iar în al doilea caz ca o bară încastrată la un capăt. Servindu-ne de formulele (134) şi (138) se pot calcula toate deplasările unitare. La al

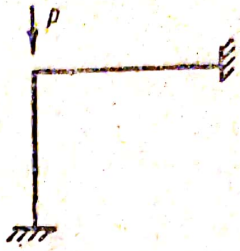


Fig. 75

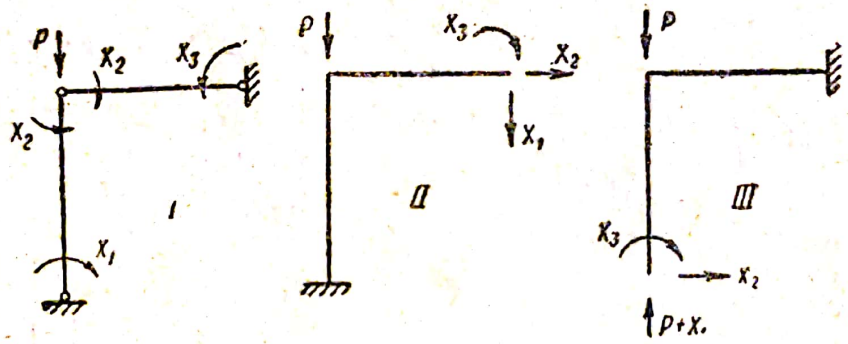


Fig. 76

treilea sistem de calcul, calculul deplasărilor se complică mult; prin urmare primele două sisteme sunt preferabile. Dintre primele două sisteme, cel dintâi prezintă unele avantaje, întrucât coeficienţii de corecţiune $\alpha(v)$ şi $\beta(v)$, care se introduc la calculul deplasărilor pentru o bară articulată la capete, se calculează ceva mai simplu decât valorile lui $\theta_1(v)$, $\theta_2(v)$ şi $\theta_3(v)$ care intră în formulele deplasărilor pentru o bară cu extremităţile încastrate.

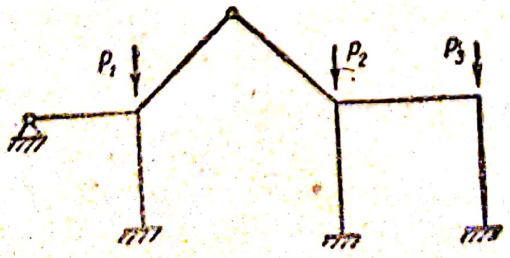


Fig. 77

In fig. 78 şi 79 sunt reprezentate două sisteme de calcul pentru cadrul din fig. 77. Sistemul de calcul înfăţişat în fig. 78 este destul de simplu, pe când, din contra, sistemul din fig. 79 este foarte complicat, prin urmare trebue să renunţăm la el.

Să precizăm noţiunea de necunoscute suplimentare, care se vor folosi în calculele de stabilitate.

Problema care se tratează are o particularitate caracteristică şi care constă în apariţia instantanee a flambajului la elementele comprimate, prin urmare şi la toate elementele cadrului în momentul

pierderii stabilităţii. Inlăturând o legătură interioară oarecare, trebue să o compensăm cu forţele care existau înainte de pierderea stabilităţii, precum şi cu cele care apar la flambarea barei. Forţele din prima categorie sunt cunoscute din calculele elementare, iar forţele din a doua categorie (forţe foarte mici) trebuesc considerate drept necunoscute suplimentare. De exemplu, în sistemul de calcul reprezentat în fig. 79, reacţiunile verticale în secţiunile de încastrare sunt exprimate prin $P_1 + X_1$ şi $P_3 + X_5$. In acest caz, necunoscutele suplimentare sunt forţele X_1 şi X_5. Această ipoteză este necesară, întrucât la determinarea deformaţiilor elementelor comprimate, neglijând forţele relativ mici X_1 şi X_5, vom ţine seamă numai de forţele de compresiune P_1 şi P_3, obţinând ca rezultat deplasările unitare, care nu sunt în funcţie de valorile necunoscutelor suplimentare. In caz contrar, datorită faptului că forţele X_1 si X_5 sunt nedeterminate, problema nu poate să fie rezolvată.

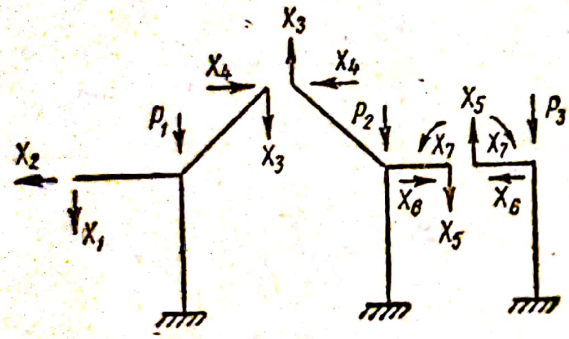


Fig. 78

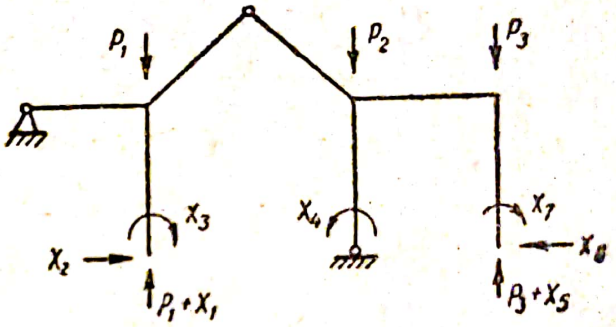


Fig. 79

§ 22. Ecuaţiile de condiţie şi ecuaţia de stabilitate

Alegând necunoscutele suplimentare, astfel cum s'a arătat în paragraful precedent, vom avea în sistemul de calcul încărcat cu forţa P, numai bare comprimate şi întinse. Deci la încărcarea în noduri în sistemul de calcul, momentele M_p vor fi egale cu zero.

Din această cauză, toţi coeficienţii de influenţă ai ecuaţiilor de condiţie vor fi egali cu zero, astfel încât ecuaţiile se vor transforma într'un sistem de ecuaţii omogene:

$$\begin{aligned}
&X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + \ldots + X_n\,\delta_{1n} = 0\,;\\
&X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + \ldots + X_n\,\delta_{2n} = 0\,;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&X_1\,\delta_{n1} + X_2\,\delta_{n2} + \ldots + X_n\,\delta_{nn} = 0\,.
\end{aligned} \qquad (140)$$

Acest sistem de ecuaţii se satisface în două cazuri:

1) Toate necunoscutele suplimentare sunt egale cu zero. Acest caz corespunde stării de echilibru a sistemului care asigură stabilitatea sub acţiunea unor forţe mai mici decât cele critice.

Scanned with OKEN Scanner

2) Necunoscutele suplimentare sunt diferite de zero, ceea ce corespunde cu producerea unei încovoieri în elementele cadrului, adică corespunde cu starea lui critică. Acest caz este posibil numai atunci când determinantul sistemului (140) este egal cu zero.

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \dots \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \dots \delta_{2n} \\ & \dots\dots \\ & \dots\dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} \dots \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (141)$$

Intrucât valoarea deplasării δ_{ik} depinde de valoarea forţei de compresiune P, este evident că se pot alege asemenea valori care să satisfacă ecuaţia (141). Prin urmare, forţele critice sau parametrul lor critic se pot determina cu ajutorul ecuaţiei (141), pe care o vom denumi *ecuaţia de stabilitate.*

§ 23. Calculul coeficienţilor ecuaţiilor de condiţie (canonice)

Pentru calculul valorii lui δ_{ik} trebue să construim două diagrame ale momentelor : diagrama lui $\overline{M}_k$ — din acţiunea forţei unitare $X_k = 1$ şi forţelor de compresiune P date şi diagrama momentelor din forţa unitară $X_i = 1$. Această din urmă diagramă trebue să fie construită fără acţiunea forţelor P, întrucât în starea virtuală trebue să fie aplicată numai o singură forţă unitară în direcţia dată.

Din contră, la calculul valorii lui δ_{ki} diagrama lui $\overline{M}_i$ trebue să fie construită din acţiunea forţei $X_i = 1$ şi a forţelor P, iar diagrama lui $\overline{M}_k$ numai din acţiunea forţei $X_k = 1$.

Astfel, pentru fiecare necunoscută suplimentară trebue să construim două diagrame. Insă, întrucât influenţa forţelor de compresiune P este cuprinsă în formulele (134) şi (138) prin coeficienţii de corecţiune aferenţi la valorile deplasărilor, care se găsesc din diagramele momentelor provenite numai din acţiunea forţelor transversale, putem să nu mai construim diagramele suplimentare.

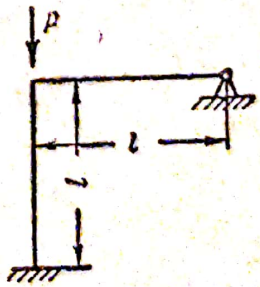


Fig. 80

Pentru ca să putem scoate în evidenţă elementele supuse la compresiune şi la încovoiere, care implică introducerea coeficienţilor de corecţiune, convenim să reprezentăm prin curbe, diagramele momentelor încovoietoare pentru barele comprimate, iar la alegerea curburii să ţinem seamă şi de încovoierea dată de forţa P.

Să examinăm un exemplu de calcul al deplasărilor, precum şi rezolvarea ecuaţiei de stabilitate. Pentru cazul reprezentat în fig. 80, vom alege sistemul de calcul din fig. 81.

Diagramele unitare ale momentelor sunt înfățișate în fig. 82. Din acestea obținem:

$$EI\delta_{11} = \frac{l}{3}\alpha(v) + \frac{l}{3}; \qquad EI\,\delta_{22} = \frac{l}{3}\alpha(v);$$

$$EI\,\delta_{12} = EI\,\delta_{21} = \frac{l}{6}\beta(v)$$

în care

$$v = l\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

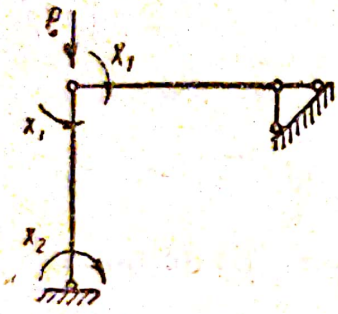


Fig. 81

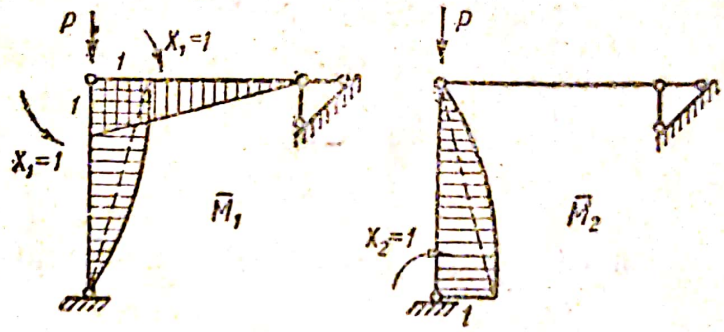


Fig. 82

Ecuațiile de condiție vor avea forma următoare:

$$\frac{l}{3}[1 + \alpha(v)]\,X_1 + \frac{l}{6}\beta(v)\,X_2 = 0;$$

$$\frac{l}{6}\beta(v)\,X_1 + \frac{l}{3}\alpha(v)\,X_2 = 0.$$

Ecuația de stabilitate $\left(\text{după reducerea cu } \frac{l}{6}\right)$ va fi:

$$D = \begin{vmatrix} 2[1 + \alpha(v)] & \beta(v) \\ \beta(v) & 2\alpha(v) \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$\beta(v) = 2\alpha(v)\sqrt{1 + \frac{1}{\alpha(v)}}$$

In ultima ecuație valoarea căutată este v, și se stabilește prin încercări.

După ce am determinat pe v, calculăm forța critică cu ajutorul formulei:

$$P_{cr} = \frac{v^2\,EI}{l^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 24. Exemple de aplicare a metodei forțelor

In cele ce urmează vom vedea că, pentru majoritatea tipurilor de cadre, calculul stabilității este mult mai simplu cu metoda deplasărilor decât cu metoda forțelor. Insă există asemenea sisteme de cadre, pentru care metoda forțelor poate să concureze pe aceea a deplasărilor și să fie chiar mult mai avantajoasă. Vom da câteva exemple de calcul, la care aplicarea metodei forțelor nu prezintă nici o dificultate.

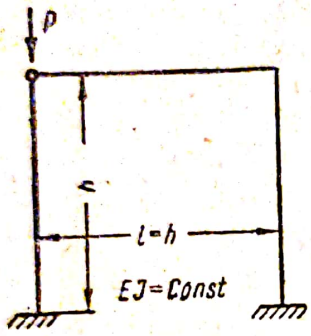


Fig. 83

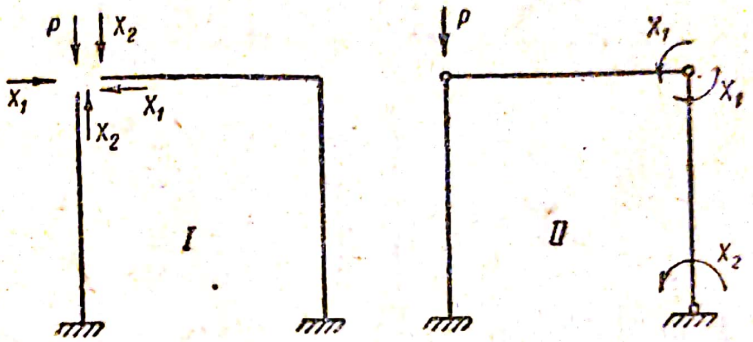


Fig. 84

Vom determina forța critică pentru cadrul înfățișat în fig. 83. Două variante ale sistemului de calcul sunt indicate în fig. 84.

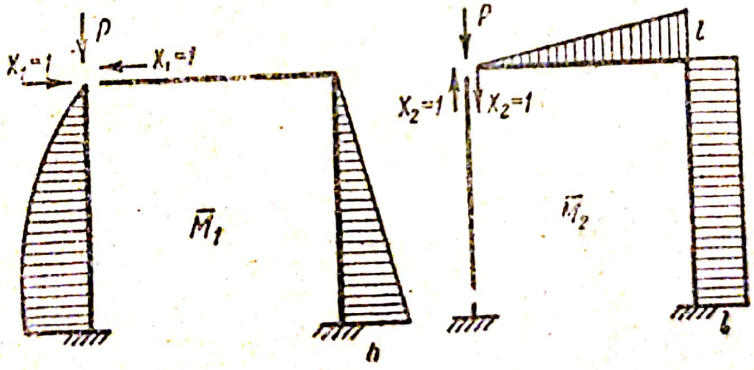


Fig. 85

Primul sistem este cel mai simplu, astfel încât îl alegem pentru calcul. Diagramele momentelor unitare în acest sistem sunt reprezentate în fig. 85. Aplicând regula stabilită mai sus pentru înmulțirea diagramelor și ținând seamă că $h = l$, obținem din formula (138):

$$EI\,\delta_{11} = \frac{h^3}{3}\,\theta_1(v) + \frac{h^3}{3} = \frac{h^3}{3}\,[1 + \theta_1(v)];$$

$$EI\,\delta_{22} = \frac{l^3}{3} + l^2 h = \frac{4}{3}\,h^3;$$

$$EI\,\delta_{12} = EI\,\delta_{21} = \frac{hl^2}{2} = \frac{h^3}{2},$$

în care

$$v = h\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

Substituind în ecuația (141) valorile deplasărilor pe care le-am găsit, obținem ecuația de stabilitate:

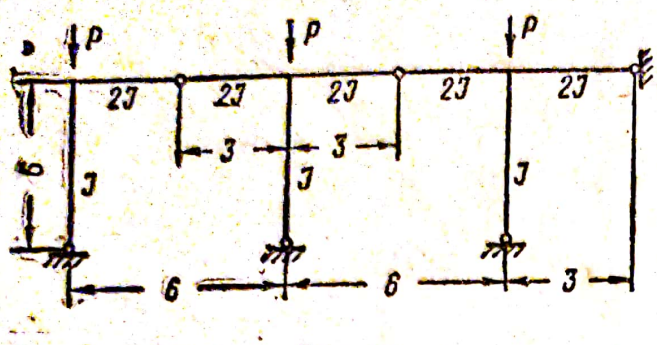


Fig. 86

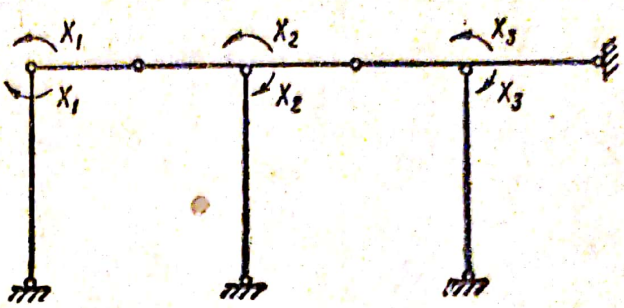


Fig. 87

$$D = \begin{vmatrix} \frac{h^3}{3}[1 + \theta_1(v)] & \frac{1}{2}h^3 \\ \frac{1}{2}h^3 & \frac{4}{3}h^3 \end{vmatrix} = 0$$

și reducând fiecare rând cu $\frac{h^3}{3}$, obținem

$$4[1 + \theta_1(v)] - 2{,}25 = 0$$

din care determinăm pe

$$\theta_1(v) = -0{,}4375$$

Folosind tabloul 1 (din anexă), găsim

$$v = 2{,}79$$

și

$$P_{cr} = \frac{v^2 EI}{l^2} = \frac{7{,}78\ EI}{l^2}$$

Dacă reprezentăm valoarea forței critice sub forma următoare:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2\ EI}{(\mu l)^2}$$

atunci coeficientul lungimii de flambaj va fi:

$$\mu = \frac{\pi}{v} = \frac{3{,}14}{2{,}79} = 1{,}13$$

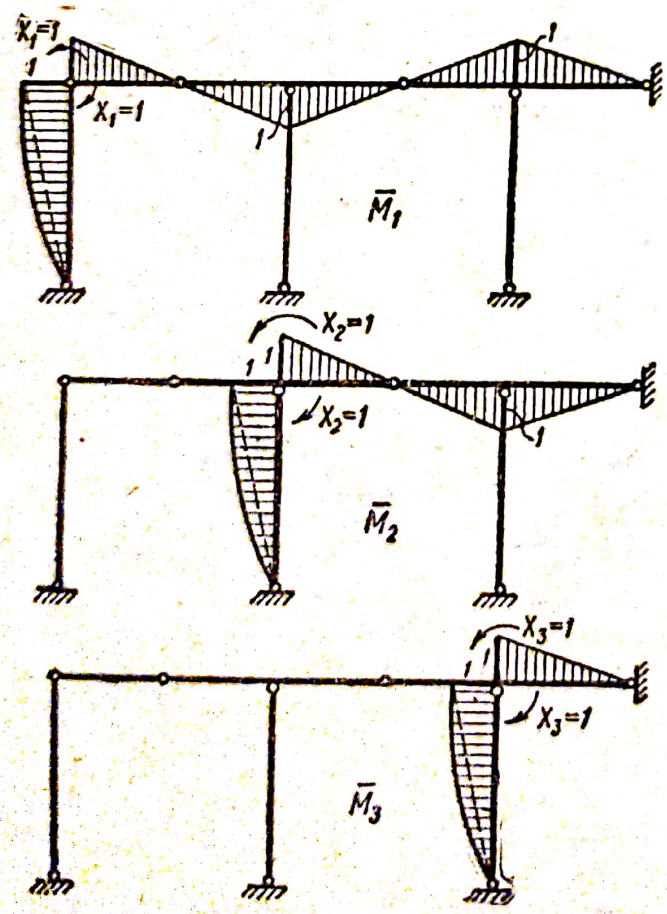


Fig. 88

Să examinăm acum cadrul înfățișat în fig. 86; sistemul de calcul fiind reprezentat în fig. 87. Servindu-ne de diagramele unitare reprezentate în fig. 88 și aplicând formula (134), găsim coeficienții ecuațiilor de condiție:

$$EI\ \delta_{11} = 2\alpha(v) + 2{,}5;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$EI\,\delta_{22} = 2\alpha(v) + 1{,}5;$$
$$EI\,\delta_{33} = 2\alpha(v) + 0{,}5;$$
$$EI\,\delta_{12} = -1{,}5;$$
$$EI\,\delta_{13} = 0{,}5;$$
$$EI\,\delta_{23} = -0{,}5.$$

Cu deplasările date și înmulțind toți coeficienții cu 2, obținem ecuația de stabilitate:

$$\begin{vmatrix} 4\alpha(v)+5 & -3 & 1 \\ -3 & 4\alpha(v)+3 & -1 \\ 1 & -1 & 4\alpha(v)+1 \end{vmatrix} = 0$$

Rezolvând determinantul de gradul al treilea și notând $4\alpha(v) = z$, obținem

$$(z+5)\cdot(z+3)\cdot(z+1) + 6 - (z+3) - (z+5) - 9(z+1) = 0$$

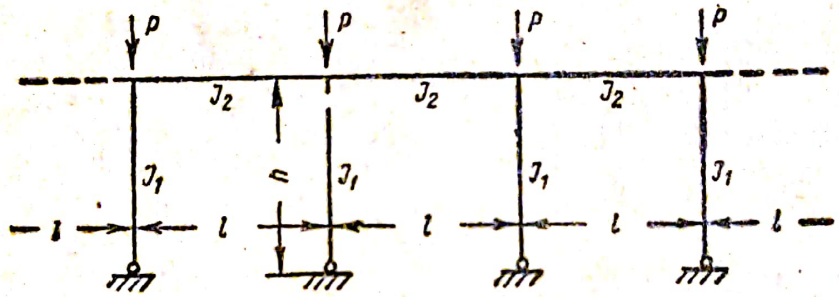


Fig. 89

După transformări, obținem următoarea ecuație de gradul al treilea în z;

$$z^3 + 9z^2 + 12z + 4 = 0$$

care are trei rădăcini:

$$z_1 = -0{,}54; \quad z_2 = -1; \quad z_3 = -7{,}46$$

La aceste rădăcini corespund următoarele valori ale funcțiunilor

$$\alpha(v_1) = -0{,}135; \quad \alpha(v_2) = -0{,}25; \quad \alpha(v_3) = -1{,}865$$

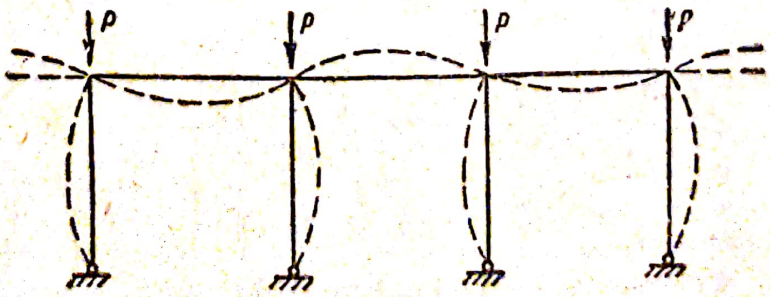


Fig. 90

Folosind tabloul 1 (din anexă), obținem:

$$v_1 = 4{,}31; \quad v_2 = 4{,}18; \quad v_3 = 3{,}53$$

Scanned with OKEN Scanner

Forța critică minimă se obține din formula:

$$P_{cr} = v^2_{min} \frac{EI}{l^2} = 12{,}46 \frac{EI}{l^2}$$

Să examinăm acum un cadru de lungime infinită cu nodurile fixe, reprezentat în fig. 89; fiecare stâlp este solicitat de o forță de compresiune P. Din cauza simetriei deformațiilor, care sunt înfățișate cu linii punctate în fig. 90, momentele dela capetele superioare ale stâlpilor vor fi egale între ele și au semne alternante.

Ca sistem de calcul vom alege un sistem static nedeterminat pentru care diagrama momentelor se construește fără prea mari dificultăți (fig. 91). Astfel problema se reduce la o singură necunoscută suplimentară și, prin urmare, ecuația de stabilitate va fi:

$$\delta_{11} = 0$$

Din diagrama momentelor reprezentată în fig. 91, pentru numărul de noduri egal cu m, găsim:

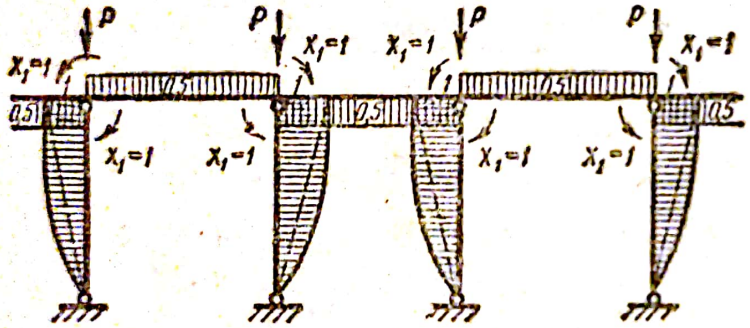


Fig. 91

$$\delta_{11} = m\left[\frac{h}{3\,EI_1}\alpha\,(v) + \frac{0{,}25\,l}{EI_2}\right] = 0,$$

de unde

$$\alpha\,(v) = -\,0{,}75\,\frac{l\,I_1}{hI_2}.$$

Cunoscând dimensiunile cadrului, această ecuație se poate rezolva foarte ușor. De exemplu, când $h = l$ și $I_1 = I_2$, cu ajutorul tabloului 1 (din anexă), obținem

$$v = 3{,}83$$

$$P_{cr} = \frac{v^2\,EI}{l^2} = 14{,}67\,\frac{EI}{l^2}$$

§ 25. Folosirea simetriei

La calculele de stabilitate, folosirea simetriei este posibilă numai în cazurile când cadrele sunt simetrice și sunt încărcate cu sarcini simetrice. Se poate demonstra că, în aceste cazuri, toate forțele critice corespund unor stări de deformație simetrice și antisimetrice. Pentru ca să putem aplica această particularitate la calculele de stabilitate, trebue să demonstrăm că determinantul sistemului general de ecuații de condiție (canonice) ale unui cadru simetric, la o alegere potrivită a necunoscutelor suplimentare, va fi egal (cu aproximația factorului constant) cu produsul a doi determinanți, din care unul se compune din coeficienții ecuațiior de condiție cu un grup simetric de necunoscute și al doilea din coeficienții grupului antisimetric.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru oricare sistem simetric şi încărcat simetric, se poate alege întotdeauna un sistem de calcul simetric.

Numerotăm necunoscutele suplimentare în aşa fel încât în punctele simetrice să fie aplicate forţele X cu suma numerelor egală cu $n + 1$, în care n este gradul de nedeterminare statică al sistemului. In acest caz, determinantul sistemului general de ecuaţii de condiţie are o simetrie dublă, adică va fi simetric în raport cu două diagonale:

$$D = \left|\begin{array}{cc|cc} & & b & \\ \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{2n} \\ a & \text{———} & \text{———} & a \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn} \\ & & b & \end{array}\right| \tag{142}$$

deci

$$\delta_{11} = \delta_{nn};\ \delta_{12} = \delta_{(n-1)\,n};\ \delta_{22} = \delta_{(n-1)\,(n-1)} \ldots \text{ etc.} \tag{143}$$

Pentru început ne vom mărgini la examinarea unui sistem cu gradul de nedeterminare statică exprimat printr'un număr cu soţ.

Impărţim determinantul prin liniile mediane $a - a$ şi $b - b$, şi obţinem astfel 4 patrate. La rândurile. care se găsesc deasupra liniei $a - a$, vom adăuga rândurile simetrice (faţă de linia $a - a$), din partea de jos a determinantului. Pe urmă, dublând numerele din partea de jos a determinantului, scădem din ele părţile de deasupra liniei $a - a$, obţinute prin procedeul de mai sus.

Astfel determinantul (142) va lua următoarea formă:

$$D_1 = \left|\begin{array}{c|c} & b \\ (\delta_{11} + \delta_{n1}) & (\delta_{1n} + \delta_{nn}) \\ a \text{———} & \text{———} \; a \\ (\delta_{n1} - \delta_{11}) & (\delta_{nn} - \delta_{1n}) \\ & b \end{array}\right| = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} D \tag{144}$$

Repetăm acelaş procedeu şi cu coloanele determinantului (144) în aşa fel încât la stânga liniei $b - b$ să se înscrie suma, iar la dreapta diferenţa coloanelor respective.

Se poate observa că pe baza egalităţii (143) rezultatele vor fi egale cu zero în patratul de sus din dreapta şi în acela de jos din stânga, iar determinantul va căpăta următoarea formă:

$$D_2 = \left|\begin{array}{c|c} 2\,(\delta_{11} + \delta_{1n}) & 0 \\ \text{———} & \text{———} \\ 0 & 2\,(\delta_{11} - \delta_{1n}) \end{array}\right| = \frac{1}{2^n} D \tag{145}$$

Observăm apoi că elementele din primul patrat al determinantu-

lui (145) reprezintă permutările necunoscutelor grupate antisimetrice și simetrice în patratul al treilea. Prin urmare vom avea

$$D_3 = \begin{vmatrix} D_k & \\ & D_n \end{vmatrix} = D_k \cdot D_n = D \cdot 2^{-n}$$

Astfel determinantul sistemului general de ecuații de condiție al unui cadru simetric este egal cu produsul determinanților grupurilor de necunoscute simetrice și antisimetrice, înmulțit cu 2^n.

Prin urmare, în locul unei ecuații de stabilitate

$$D = 0 \tag{146}$$

vom avea două ecuații de stabilitate:

$$\left.\begin{aligned} D_n &= 0 \\ D_k &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

De aci rezultă că parametrii critici găsiți prin egalarea cu zero a determinanților formați din grupul de necunoscute antisimetrice și cele simetrice, cuprind toți parametrii critici.

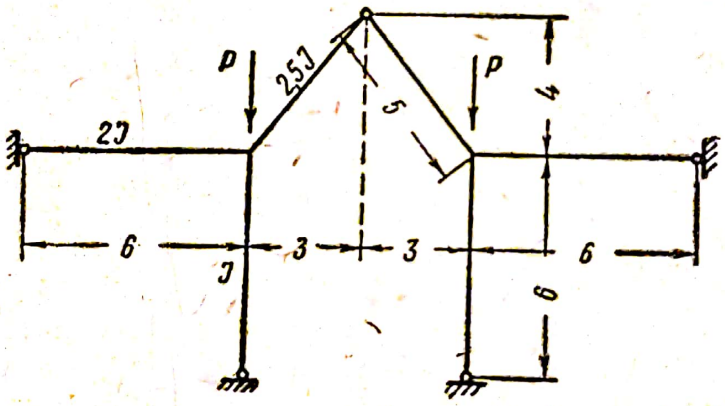


Fig. 92

Având în vedere cele demonstrate mai sus, rezultă că pentru determinarea forțelor critice minime ale unui sistem simetric și încărcat simetric este suficient să găsim doi parametri critici minimi pentru cazurile de grupare simetrică și antisimetrică a necunoscutelor.

Astfel, în calculele de stabilitate, folosirea simetriei dă o reducere considerabilă a calculelor, întrucât efectuarea calculului a doi determinanți este mult mai ușoară decât calculul unui determinant al cărui grad este egal cu suma gradelor celor doi determinanți.

Să examinăm cadrul simetric reprezentat în fig. 92. Sistemul de calcul cu gruparea necunoscutelor suplimentare este arătat în fig. 93. Din diagramele unitare ale momentelor (fig. 94) grupării simetrice a necunoscutelor, găsim

$$EI\,\delta_{11} = 2\left[\frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} 1 + \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \alpha(v)\right] =$$

Alcătuim determinantul din coeficienţii ecuaţiilor de condiţie şi egalându-l cu zero, obţinem ecuaţia de stabilitate

$$\begin{vmatrix} 2 + 4\,\alpha(v) & -8 \\ -8 & \frac{160}{3} \end{vmatrix} = 0$$

de unde determinăm pe

$$\alpha(v) = -0{,}2$$

Din tabloul 1 (din anexă) găsim:

$$v = 4{,}23$$

şi

$$P_{cr} = 17{,}89\,\frac{EI}{l^2}$$

Astfel la deformaţia simetrică a cadrului corespunde forţa critică $P_{cr} = 17{,}89\,\frac{EI}{l^2}$. Pentru cadrul pe care îl examinăm sunt reprezentate în fig. 95, două stări de deformaţie: cu liniile punctate *1* + *2* este arătată deformaţia simetrică, iar cu liniile punctate în jumătatea din stânga *1* şi în jumătatea din dreapta *3* este reprezentată deformaţia antisimetrică. Se poate observa uşor că jumătatea din stânga a cadrului se găseşte în ambele cazuri în aceleaşi condiţii. Plecând dela această constatare, se poate stabili anticipat că forţele critice în ambele stări critice vor fi egale. Întradevăr să examinăm gruparea antisimetrică a necunoscutelor. Din diagramele unitare reprezentate în fig. 96, găsim coeficienţii ecuaţiilor de condiţie:

$$EI\,\delta_{33} = 2 + 4\,\alpha(v); \quad EI\,\delta_{44} = 30; \quad EI\,\delta_{34} = -6$$

Ecuaţia de stabilitate pentru starea de deformaţie antisimetrică va fi:

$$\begin{vmatrix} 2 + 4\,\alpha(v) & -6 \\ -6 & 30 \end{vmatrix} = 0$$

Găsim fără dificultate valoarea lui $\alpha(v) = -0{,}2$. Astfel ecuaţia de stabilitate pentru ambele cazuri are unul şi acelaş rezultat $\alpha(v)$, prin urmare şi forţele critice vor avea valori egale.

In majoritatea cazurilor însă, forţele corespunzătoare la diferite stări critice vor fi diferite ca valoare. De aceea pentru determinarea forţei critice minime este necesar să ţinem seamă de ambele grupări de necunoscute, alcătuind două ecuaţii de stabilitate şi calculând pentru fiecare parametrul minim critic şi alegând apoi pe cel mai mic.

Pentru un număr limitat de cadre, metoda forţelor poate să dea o soluţie destul de simplă. Pentru aplicarea acestei metode se pretează cadrele al căror sistem de calcul permite folosirea de formule simple pentru determinarea deplasărilor.

Pentru cadrele cu un număr mare de necunoscute şi, în special, pentru cadrele etajate, metoda forţelor se complică mult şi, în unele cazuri devine chiar inaplicabilă.

In aceste cazuri trebue să alegem alte metode de calcul, de exemplu metoda deplasărilor.

Scanned with OKEN Scanner

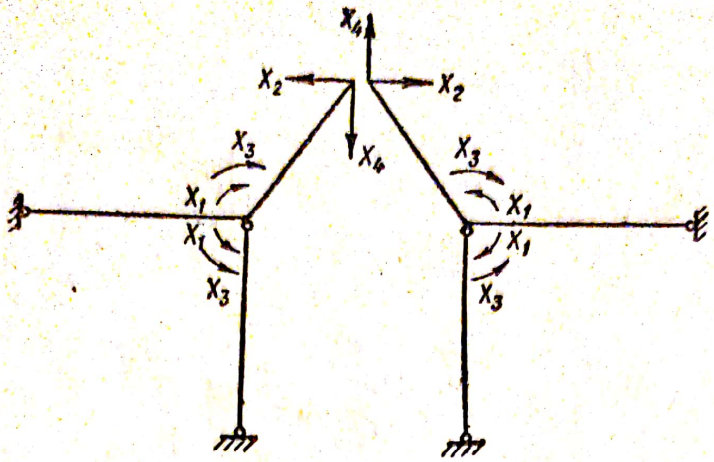
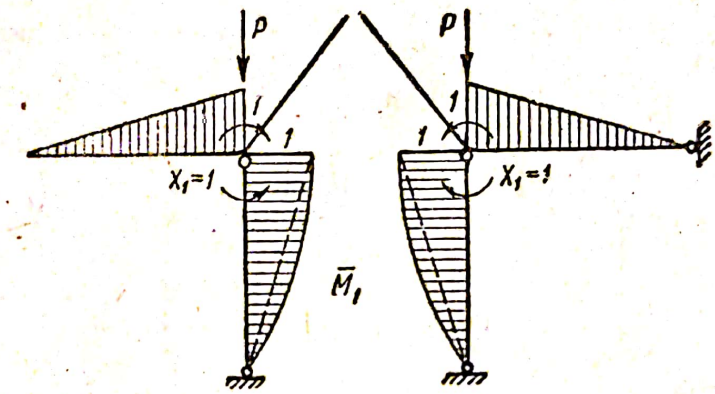


Fig. 93



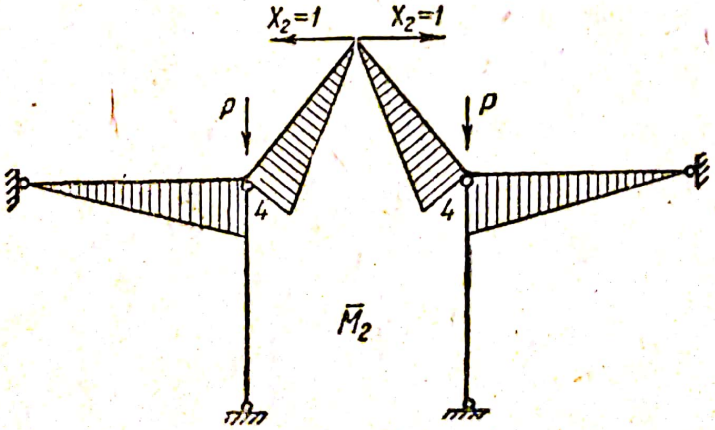


Fig. 94

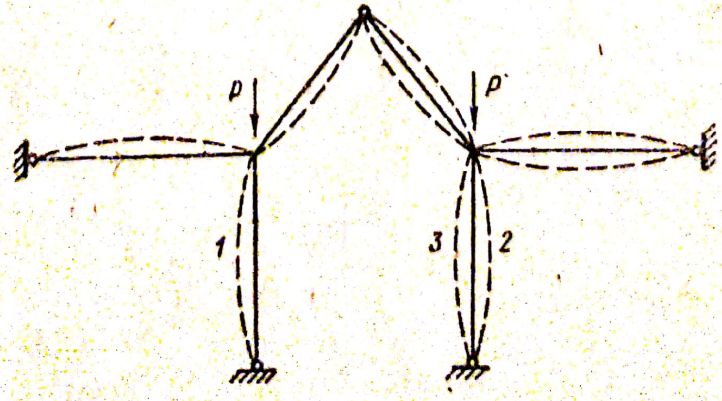


Fig. 95

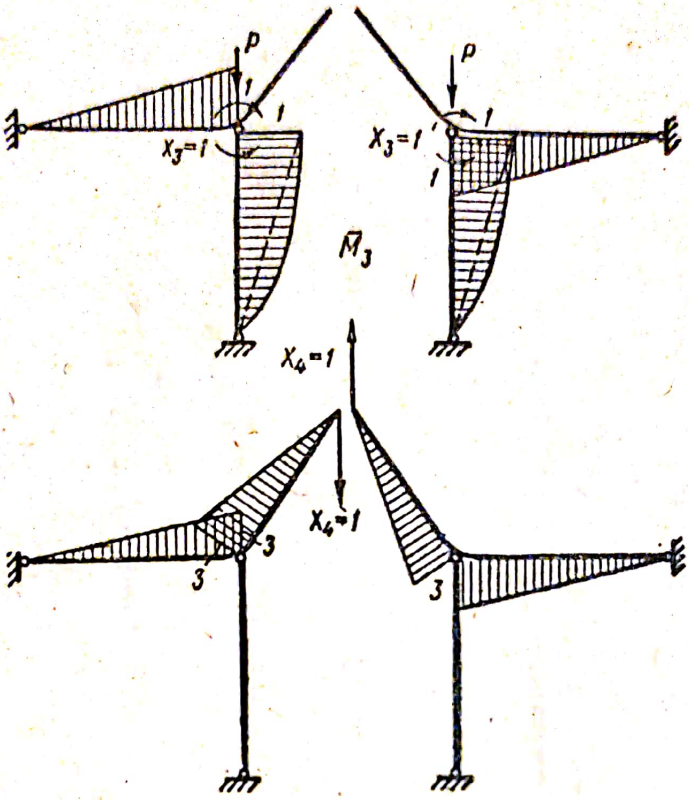


Fig. 96

B. *METODA DEPLASĂRILOR*

§ 26. Ecuaţia de stabilitate

La calculul stabilităţii cadrelor cu metoda deplasărilor, alegerea sistemului de calcul nu se deosebeşte cu nimic de alegerea sistemului la calculele statice obişnuite ce se fac cu această metodă.

Intrucât considerăm numai cadrele cu o astfel de încărcare, care fiind concentrată la noduri, până în momentul pierderii stabilităţii provoacă numai compresiune în bare (sau întindere) reacţiunile în legăturile fictive, provocate de încărcare, sunt egale cu zero, iar sistemul ecuaţiilor de condiţie va fi un sistem omogen:

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + \ldots\ldots + Z_n r_{1n} &= 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_2 + \ldots\ldots + Z_n r_{2n} &= 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_1 r_{n1} + Z_2 r_{n2} + \ldots\ldots + Z_n r_{nn} &= 0; \end{aligned} \qquad (148)$$

Acest sistem de ecuaţii va fi satisfăcut atunci când toate necunoscutele sunt egale cu zero; aceasta indică lipsa încovoierii în barele cadrului, deci şi stabilitatea sistemului la forţe mai mici decât cele critice. La momentul pierderii stabilităţii corespunde neegalitatea cu

zero a necunoscutelor, ceea ce este posibil numai atunci când determinantul format din coeficienţii necunoscutelor este egal cu zero :

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (149)$$

Ecuaţia (149) este ecuaţia de stabilitate pentru calculul cu metoda deplasărilor.

§ 27. Calculul reacţiunilor

Calculul reacţiunilor provenite din deplasările unitare ale legăturilor fictive trebue să se facă ţinând seamă de influenţa forţelor de compresiune. Să rezolvăm această problemă cu ajutorul metodei forţelor, folosind rezultatele obţinute în paragrafele precedente.

Vom examina mai întâi o bară încastrată la un capăt şi articulată la celălalt. Construim diagrama momentelor pentru rotirea secţiunii de încastrare cu un unghiu unitar (fig. 97). In acest caz, coeficientul de influenţă al ecuaţiei de condiţie este diferit de zero. Cu direcţia aleasă a unghiului de rotire $Z = 1$ şi a necunoscutei suplimentare $X_1 = 1$, obţinem, după cum se arată în fig. 97 b,

$$\Delta_{1z} = -1.$$

Valoarea deplasării δ_{11} trebue să fie calculată ţinând seamă de influenţa forţei de compresiune P, deci folosind formula (134) vom avea:

$$EI\,\delta_{11} = \frac{l}{3}\,\alpha(v)$$

Din ecuaţia de condiţie găsim

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1z}}{\delta_{11}} = \frac{3\,EI}{l}\,\frac{1}{\alpha(v)}$$

Notăm

$$\frac{EI}{l} = i$$

şi

$$\varphi_1(v) = \frac{1}{\alpha(v)} = \frac{v^2}{3\left(1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)} \qquad (150)$$

Atunci momentul de încastrare va fi

$$X_1 = 3i\,\varphi_1(v) \qquad (151)$$

La calculul static al cadrelor cu metoda deplasărilor, aceeaşi valoare se determină cu ajutorul expresiei :

$$X_1 = 3i$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel reacţiunea în secţiunea de încastrare la rotirea acestei secţiuni cu unghiul unitar, ţinând seamă de influenţa forţei P, este mai mică decât reacţiunea unei bare simple. Prima diferă de cea de a doua prin prezenţa factorului $\varphi_1(v)$ care este mai mic decât unitatea. Diagrama momentelor la rotirea unei bare comprimate în secţiunea de încastrare este reprezentată în fig. 97 c.

Forţa tăietoare raportată la axa iniţială a barei este egală cu:

$$Q = \frac{3i}{l}\varphi_1(v) \tag{152}$$

Să examinăm acum cazul deplasării secţiunii de încastrare a aceleiaşi bare cu valoarea $Z = 1$ (fig. 98 a). Diagrama momentelor provocate în sistemul de calcul de $X = 1$ şi de forţa P este înfăţişată în fig. 98 b. Deplasarea în direcţia necunoscutei provocată de deplasarea secţiunii de încastrare este egală cu:

$$\Delta_{1z} = \frac{1}{l}$$

Deplasarea produsă de forţa unitară este egală cu

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI}\alpha(v) = \frac{1}{3i}\alpha(v)$$

Prin urmare

$$X_1 = -\frac{3i}{l}\varphi_1(v) \tag{153}$$

în această expresie $\varphi_1(v)$ se determină din formula (150).

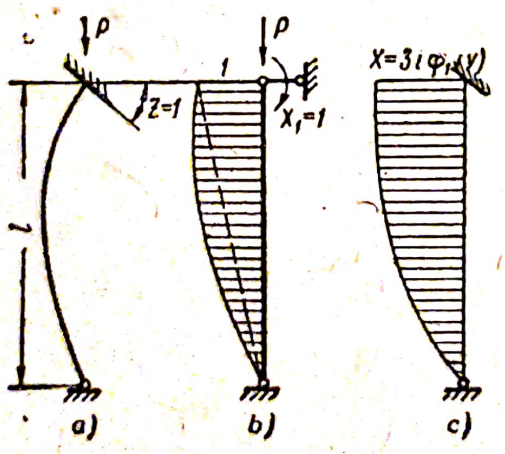


Fig. 97

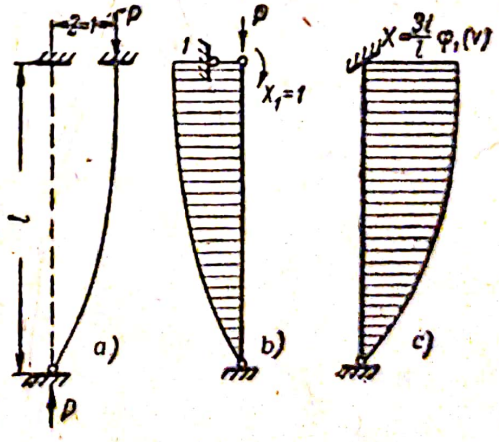


Fig. 98

Diagrama momentelor este reprezentată în fig. 98 c. Forţa tăietoare raportată la axa iniţială a barei se determină cu ajutorul următoarei formule

$$Q = \frac{X_1}{l} - \frac{P \cdot 1}{l} = \frac{3i}{l^2}\varphi_1(v) - \frac{v^2 EI}{l^3} =$$

$$= \frac{3i}{l}\left[\varphi_1(v) - \frac{v^2}{3}\right] \tag{154}$$

Notăm

$$\eta_1(v) = \varphi_1(v) - \frac{v^2}{3} \tag{155}$$

Atunci

$$Q = \frac{3i}{l^2}\eta_1(v) \tag{156}$$

De aci rezultă că forța tăietoare la deplasarea secțiunii de încastrare a unei bare diferă de aceeași forță calculată fără a ține seamă de forța axială, prin coeficientul de corecțiune $\eta_1(v)$, care se determină din formula (155).

Același rezultat se obține și în cazul când drept sistem de calcul se ia o bară încastrată la un capăt. Atunci necunoscuta suplimentară va fi chiar forța tăietoare. In acest caz deplasările vor fi:

$$EI\ \delta_{11} = \frac{l^3}{3}\theta_1(v) \quad \text{și} \quad \Delta_{1z} = -1$$

Prin urmare

$$X = Q = \frac{3i}{l^2}\frac{1}{\theta_1(v)}. \tag{157}$$

Comparând formulele (156) și (157) obținem următoarea egalitate

$$\frac{1}{\theta_1(v)} = \eta_1(v) = \varphi_1(v) - \frac{v^2}{3}$$

Conform formulei (139)

$$\theta_1(v) = \frac{\operatorname{tg} v}{v}\alpha(v) = \frac{\operatorname{tg} v}{v}\frac{1}{\varphi_1(v)}$$

Prin urmare

$$\varphi_1(v)\frac{v}{\operatorname{tg} v} = \varphi_1(v) - \frac{v^2}{3}$$

Verificarea acestei egalități se face prin substituirea valorii funcțiunii $\varphi_1(v)$ din expresia (150).

Să examinăm acum o bară având ambele capete încastrate. La rotirea unei secțiuni de încastrare cu unghiul $Z = 1$ (fig. 99) se vor produce la capetele barei momente, pe care le vom nota cu X_1 și X_2. Diagramele unitare sunt reprezentate în fig. 99 b și c. Din aceste diagrame obținem:

$$EI\ \delta_{11} = EI\ \delta_{22} = \frac{l}{3}\alpha(v); \qquad EI\ \delta_{12} = EI\ \delta_{21} = \frac{l}{6}\beta(v);$$

$$\Delta_{1z} = 1; \quad \Delta_{2z} = 0.$$

Pentru aceste valori ale deplasărilor, ecuațiile de condiție iau următoarea formă:

$$\frac{l}{3}\alpha(v)X_1 + \frac{l}{6}\beta(v)X_2 = EI = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{l}{6}\beta(v)\,X_1 + \frac{l}{3}\alpha(v)\,X_2 = 0$$

în care

$$X_1 = -4i\,\varphi_2(v); \qquad X_2 = 2i\,\varphi_3(v), \tag{158}$$

în care

$$\left.\begin{aligned}\varphi_2(v) &= \frac{1-\dfrac{v}{\operatorname{tg} v}}{4\left[\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}}{\dfrac{v}{2}}-1\right]};\\ \varphi_3(v) &= \frac{\dfrac{v}{\sin v}-1}{2\left[\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}}{\dfrac{v}{2}}-1\right]}.\end{aligned}\right\} \tag{159}$$

Diagrama definitivă a momentelor este înfățișată în fig. 99 d.

Din cele expuse mai sus, rezultă că momentele dela extremitățile barei provocate de rotirea unei secțiuni de încastrare cu un unghiu unitar, calculate ținând seamă și de forța de compresiune P, se determină în același fel ca și cele calculate fără forța de compresiune, însă cu introducerea coeficienților de corecțiune $\varphi_2(v)$ și $\varphi_3(v)$, prin care se ușurează construirea diagramelor unitare și calcularea reacțiunilor.

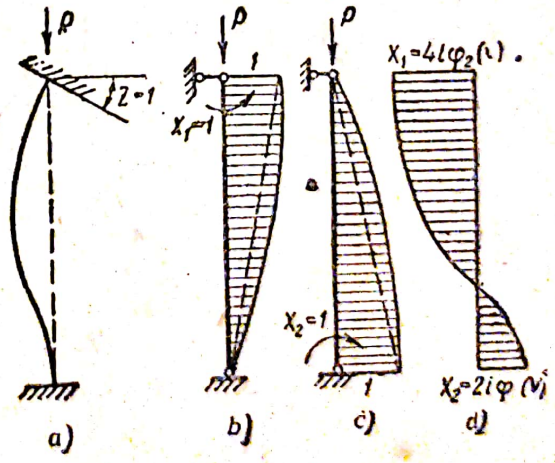


Fig. 99

Forța tăietoare se determină cu ajutorul formulei

$$Q = \frac{X_2 - X_1}{l} = \frac{6i}{l}\left[\frac{2}{3}\varphi_2(v) + \frac{1}{3}\varphi_3(v)\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

După transformări obținem

$$\frac{2}{3}\varphi_2(v)+\frac{1}{3}\varphi_3(v)=\eta_3(v)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{v}{2}\right)^2}{1-\frac{\frac{v}{2}}{\operatorname{tg}\frac{v}{2}}} \tag{160}$$

și prin urmare

$$Q=\frac{6i}{l}\eta_3(v), \tag{161}$$

în care

$$\eta_3(v)=\varphi_1\left(\frac{v}{2}\right) \tag{162}$$

Să examinăm acum cazul deplasării laterale unitare a uneia dintre secțiunile de încastrare (fig. 100 a). Față de deformația antisimetrică în sistemul de calcul, introducem grupul antisimetric de necunoscute (fig. 100 b). Din diagrama unitară a momentelor, înfățișată în fig. 100 c determinăm deplasarea cu ajutorul formulei (134).

$$EI\,\delta_{11}=\frac{2l}{3}\alpha(v)-\frac{l}{3}\beta(v).$$

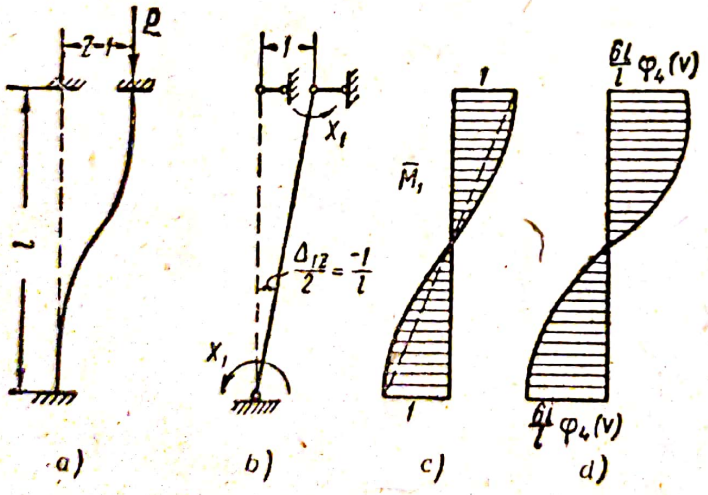


Fig. 100

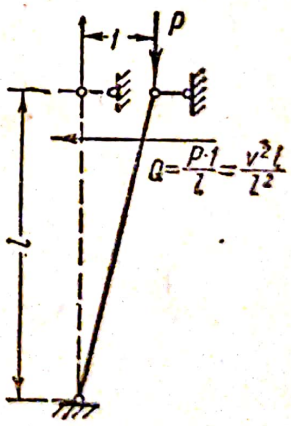


Fig. 101

Deplasarea dată de $Z=1$ va fi

$$\Delta_{1z}=-\frac{2}{l}$$

prin urmare

$$X_1=-\frac{\Delta_{1z}}{\delta_{11}}=\frac{6i}{l}\frac{1}{2\alpha(v)-\beta(v)}$$

Notăm

$$\frac{1}{2\alpha(v)-\beta(v)}=\varphi_4(v).$$

Scanned with OKEN Scanner

După substituirea expresiei lui $\alpha\ (v)$ și $\beta\ (v)$ obținem:

$$\varphi_4(v) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^2}{1 - \frac{\frac{v}{2}}{\operatorname{tg}\frac{v}{2}}} = \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right). \tag{163}$$

Astfel momentele în secțiunile de încastrare vor fi:

$$X_1 = \frac{6i}{l}\varphi_4(v)$$

Diagrama momentelor este reprezentată în fig. 100 d.
Forța tăietoare este egală cu

$$Q = \frac{2X_1}{l} - \frac{P.1}{l} = \frac{12i}{l^2}\eta_2(v) \tag{164}$$

în care

$$\eta_2(v) = \eta_1\left(\frac{v}{2}\right) = \varphi_4(v) - \frac{v^2}{12} \tag{165}$$

La calculul cadrelor la acțiunea obișnuită a sarcinilor statice cu metoda deplasărilor, cele patru cazuri expuse mai sus erau absolut suficiente pentru alcătuirea ecuațiilor de condiție. In calculele stabilității cadrelor trebue să mai adăugăm la aceste patru cazuri un al cincilea — bara articulată la ambele capete. Pentru o asemenea bară trebue să determinăm forța tăietoare raportată la axa inițială a barei.

Din fig. 101 avem:

$$Q = -\frac{P \cdot 1}{l}$$

Ținând seama că

$$P = \frac{v^2 EI}{l^2}$$

obținem

$$Q = -\frac{i}{l^2}v^2. \tag{166}$$

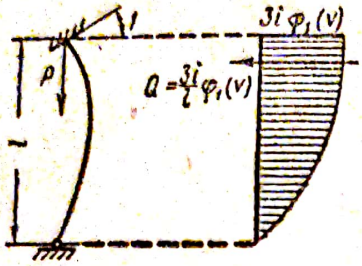
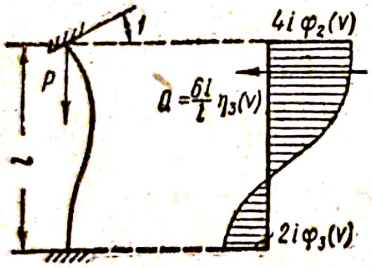
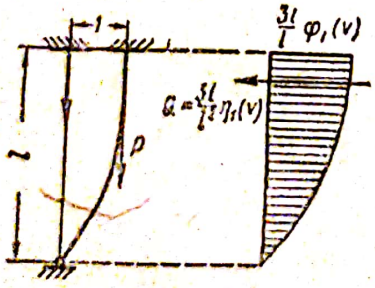
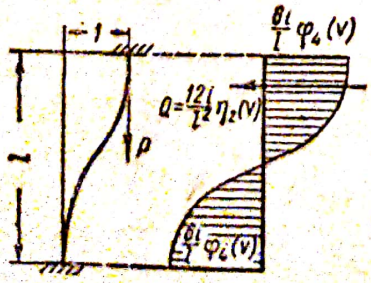
Pentru orientare, formulele obținute au fost concentrate în tabloul 9.

Pentru a ușura rezolvarea problemelor cu ajutorul metodei deplasărilor, toți coeficienții de corecțiune: $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$; $\varphi_3(v)$; $\varphi_4(v)$; $\eta_1(v)$ și $\eta_2(v)$ sunt calculați pentru diferite valori ale lui v și sunt trecuți în tabloul 2 din anexă.[1])

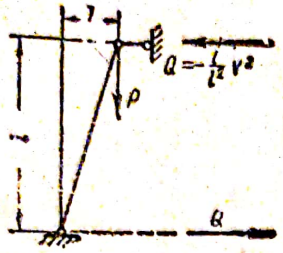
[1]) Tabloul 2 a fost calculat inițial de către Karnauhov cu diferențierea factorilor și cu o mare variație a argumentului. Tablourile care figurează în tratatul de față sunt calculate de către A. F. Smirnov și sunt extrase din lucrarea sa „Stabilitatea statică și dinamică a construcțiilor" 1947.

Tabloul 9

Momentele reacțiunilor și forțele tăietoare provocate de deplasările unitare

Felul deplasării și diagrama momentelor	Coeficienții de corecțiune
	$\varphi_1(v)=\dfrac{v^2}{3\left(1-\dfrac{v}{\operatorname{tg} v}\right)}$ $v=l\sqrt{\dfrac{P}{EI}}$
	$\varphi_2(v)=\dfrac{1-\dfrac{v}{\operatorname{tg} v}}{4\left[\dfrac{\operatorname{tg}\frac{v}{2}}{\frac{v}{2}}-1\right]}$ $\varphi_3(v)=\dfrac{\dfrac{v}{\sin v}-1}{2\left[\dfrac{\operatorname{tg}\frac{v}{2}}{\frac{v}{2}}-1\right]}$ $\eta_3(v)=\varphi_1\left(\dfrac{v}{2}\right)=\varphi_4(v)$
	$\eta_1(v)=\varphi_1(v)-\dfrac{v^2}{3}$
	$\varphi_4(v)=\varphi_1\left(\dfrac{v}{2}\right)$ $\eta_2(v)=\eta_1\left(\dfrac{v}{2}\right)=\varphi_4(v)-\dfrac{v^2}{12}$

Scanned with OKEN Scanner

Felul deplasării şi diagrama momentelor	Coeficienţii de corecţiune
	$v = l\sqrt{\frac{P}{EI}}$ Valorile funcţiunilor φ şi η sunt date în anexă tabloul 2

§ 28. Exemple de aplicare a metodei deplasărilor

Fig. 102 reprezintă un cadru cu doi stâlpi încastraţi. Se cere să determinăm forţa critică pentru dimensiunile şi rigiditatea dată a elementelor cadrului. Sistemul de calcul este înfăţişat în fig. 103 a, valorile lui i ale elementelor sunt înscrise în dreptunghiuri.

Întrucât lungimile, rigidităţile şi forţele de compresiune ale stâlpilor sunt identice, valorile lui v pentru ambii stâlpi vor fi egale:

$$v = v_1 = v_2 = l\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

In fig. 103 b şi c sunt reprezentate diagramele unitare ale momentelor, din care găsim:

$$r_{11} = 2{,}75 + \varphi_2(v); \quad r_{22} = 2{,}0 + \varphi_2(v); \quad r_{12} = 1.$$

Ecuaţiile de condiţie pentru acest caz vor avea forma următoare

$$Z_1\,[2{,}75 + \varphi_2(v)] + Z_2 = 0$$
$$Z_1 + Z_2\,[2 + \varphi_2(v)] = 0.$$

La valori diferite de zero ale necunoscutelor, corespunde ecuaţia de stabilitate (149)

$$\begin{vmatrix} 2{,}75 + \varphi_2(v) & 1 \\ 1 & 2 + \varphi_2(v) \end{vmatrix} = 0$$

care ne conduce la o ecuaţie de gradul al doilea în raport cu funcţiunea $\varphi_2(v)$:

$$\varphi_2^2(v) + 4{,}75\,\varphi_2(v) + 4{,}5 = 0.$$

Rezolvând această ecuaţie obţinem:

$$\varphi_2(v) = -2{,}375 \pm \sqrt{2{,}375^2 - 4{,}5}$$

Astfel obţinem două valori ale lui φ:

$$\varphi_2^{I}(v) = -1{,}307;$$
$$\varphi_2^{II}(v) = -3{,}443$$

Scanned with OKEN Scanner

La valoarea cea mai mică a argumentului, corespunde $\varphi_2(v) = -1{,}307$. Din tabloul 2 (a se vedea anexa), găsim valoarea corespunzătoare a argumentului:

$$v = 5{,}46$$

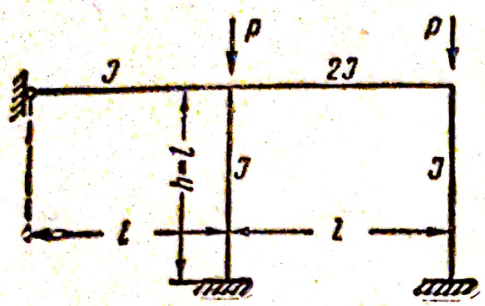


Fig. 102

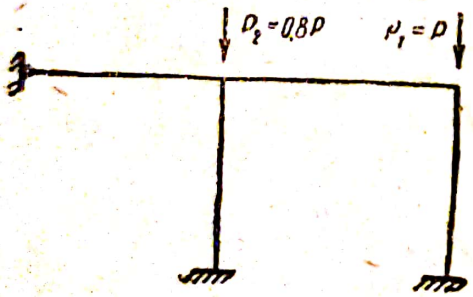


Fig. 104

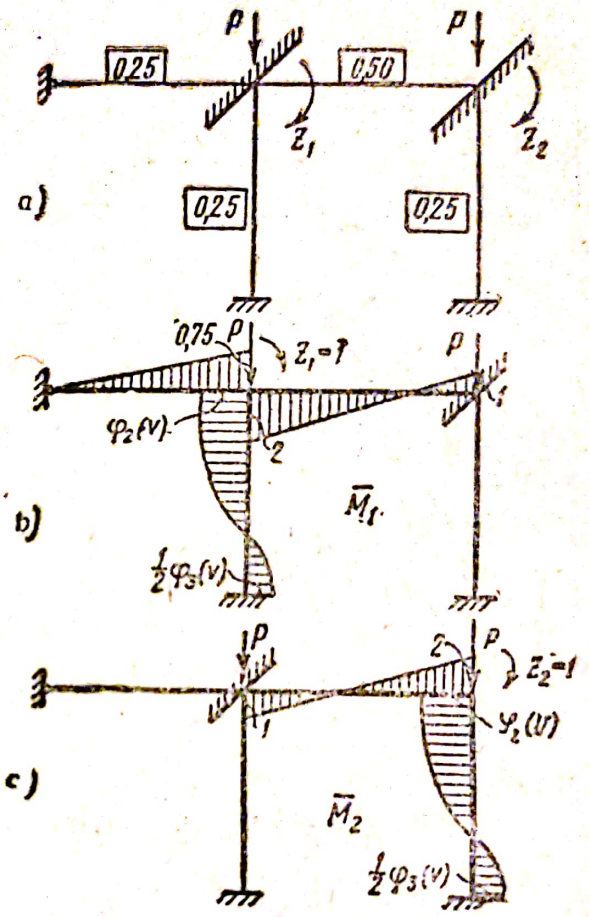


Fig. 103

Prin urmare, forța critică va fi egală cu:

$$P_{cr} = \frac{v^2 EI}{l^2} = 29{,}81 \frac{EI}{l^2}$$

Să considerăm acum același exemplu însă cu aplicare la cazul când forțele de compresiune asupra stâlpilor sunt diferite (fig. 104). In acest caz, pentru aceleași dimensiuni și rigidități ale elementelor cadrului, argumentele coeficienților de corecțiune vor fi diferite pentru fiecare stâlp:

$$v_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EI}} = \sqrt{\frac{0{,}8\ P}{EI}} = \sqrt{0{,}8} \cdot v = \alpha \cdot v;$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{P_2}{EI}} = \sqrt{\frac{P}{EI}} = v.$$

Ecuaţia de stabilitate se va scrie sub următoarea formă:

$$\begin{vmatrix} 2{,}75 + \varphi_2(v) & 1 \\ 1 & 2 + \varphi_2(v) \end{vmatrix} = 0$$

In locul unei ecuaţii de gradul al doilea, vom obţine:

$$\varphi_2(\alpha \cdot v)\ \varphi_2(v) + 2\ \varphi_2(\alpha \cdot v) + 2{,}75\ \varphi_2(v) + 4{,}5 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Rezolvarea unei asemenea ecuaţii trebue să se facă prin încercări. Pentru a uşura determinarea valorii lui v se poate folosi condiţia din care rezultă că valoarea lui v se găseşte între următoarele limite:

$$v' < v < v''$$

iar valorile v' şi v'' se pot obţine din ecuaţia (a) făcând două substituiri:

$$v_1 = v_2 = v;$$
$$v_1 = v_2 = \alpha \cdot v.$$

In acest caz ecuaţia de stabilitate va căpăta următoarea formă:

$$\varphi_2^2\ (v) + 4{,}75\ \varphi_2\ (v) + 4{,}5 = 0$$

şi

$$\varphi_2^2\ (\alpha v) + 4{,}75\ \varphi_2(\alpha v) + 4{,}5 = 0$$

Pentru primul caz găsim:

$$\varphi_2\ (v') = -\ 1{,}307; \quad v' = 5{,}46.$$

Pentru cazul al doilea vom avea:

$$\varphi_2\ (\alpha\ v'') = -\ 1{,}307$$
$$\alpha\ v'' = 5{,}46$$

$$v'' = \frac{5{,}46}{\alpha} = \frac{5{,}46}{\sqrt{8}} = 6{,}10$$

Astfel argumentul căutat se va găsi între limitele

$$5{,}46 < v < 6{,}10.$$

Dacă notăm

$$\Delta = \varphi_2(\alpha\, v)\ \varphi_2(v) + 2\ \varphi_2(\alpha\, v) + 2{,}75\ \varphi_2(v) + 4{,}5,$$

atunci:

pentru $v = 5{,}46$: $\Delta > 0$
pentru $v = 6{,}10$; $\Delta < 0$

Ca o primă aproximaţie admitem că $v = 5{,}8$; atunci folosind tabloul 2 (din anexă), obţinem

$$\Delta_1 = \varphi_2\ (5{,}8 \cdot \sqrt{0{,}8})\ \varphi_2\ (5{,}8) + 2\ \varphi_2\ (5{,}8\ \sqrt{0{,}8}) + 2{,}75\ \varphi_2\ (5{,}8) + 4{,}5 = -\ 2{,}54$$

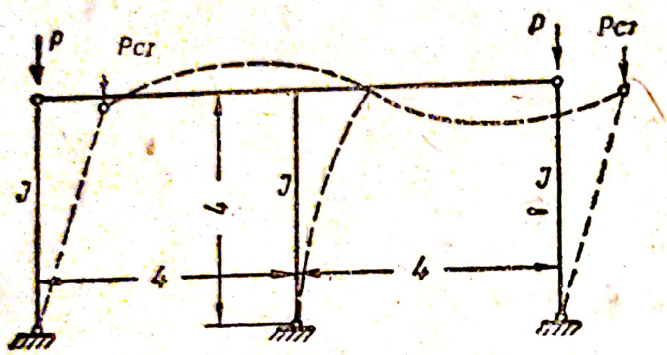
Prin urmare

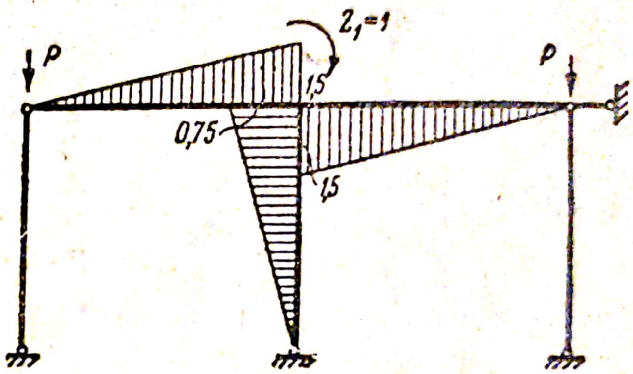
$$5{,}46 < v < 5{,}8$$

Apropiind treptat limitele între care se găsește valoarea căutată, vom obține :

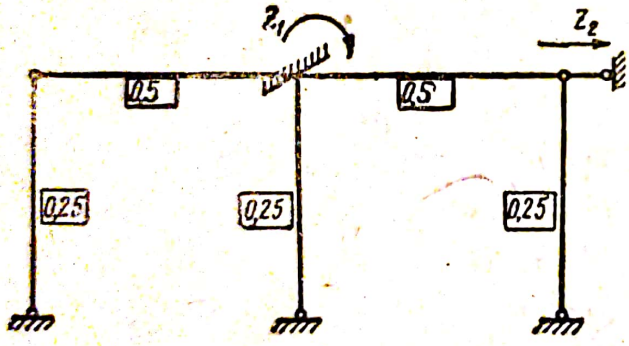
$$v = 5{,}56 \quad \text{și} \quad P_{cr} = 30{,}9\,\frac{EI}{l^2}$$

Mai departe vom examina exemplul de determinare a forței critice pentru cadrul înfățișat în fig. 105.





Fig, 105



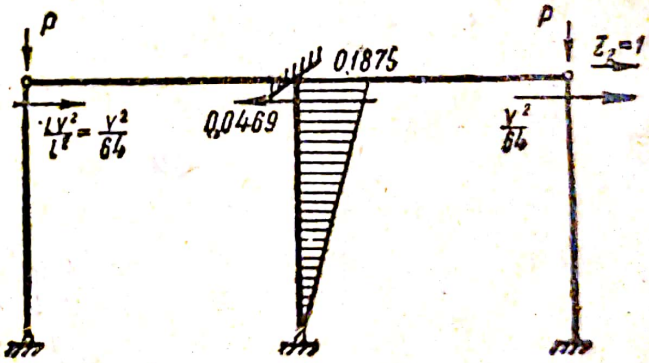


Fig. 106

Fig. 107

Stâlpii extremi articulați la capete sunt supuși la compresiune. Este posibil ca stâlpii să flambeze înspre exterior, astfel încât partea dela mijlocul cadrului să rămână nedeformată. In acest caz forța critică este :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2\,EI}{l^2}$$

De asemenea este posibil și un alt caz de deformație, reprezentat cu linii punctate în fig. 105. Pentru acest caz este necesar să alcătuim ecuația de stabilitate. Sistemul de calcul este înfățișat în fig. 106.

Din diagramele unitare (fig. 107) găsim :

$$r_{11} = 3{,}75\,; \quad r_{22} = -\frac{v^2}{32} + 0{,}0469\,; \quad r_{12} = -\,0{,}1875$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia de stabilitate (149)

$$D = \begin{vmatrix} 3{,}75 & -0{,}1875 \\ -0{,}1875 & -\frac{v^2}{32} + 0{,}0469 \end{vmatrix} = 0$$

se transformă într'o ecuaţie simplă

$$\left(-\frac{v^2}{32} + 0{,}0469 \right) 3{,}75 - 0{,}0352 = 0$$

de unde găsim

$$v^2 = 1{,}2 \quad \text{şi} \quad P_{cr} = \frac{1{,}2\ EI}{l^2}$$

Prin urmare la forţa critică minimă corespunde starea de deformaţie reprezentată cu linii punctate în fig. 105.

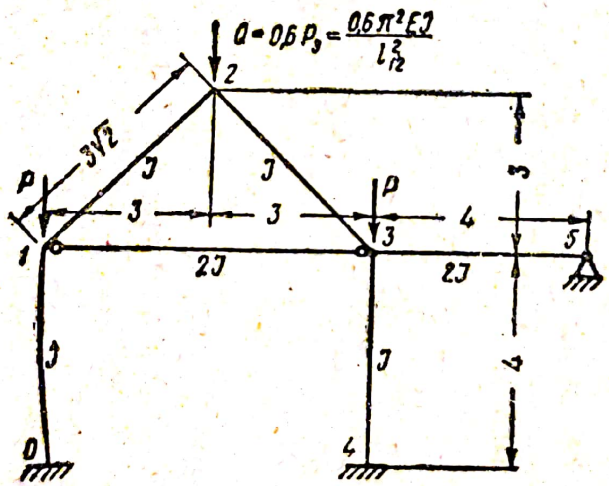


Fig. 108

Să examinăm acum exemplul înfăţişat în fig. 108. Sarcina aplicată în nodul superior 2, este constantă. Vor creşte numai forţele P în raport cu care vom calcula pierderea stabilităţii cadrului.

Obţinem valoarea lui v pentru barele comprimate

$$v_{12} = v_{23} = v_0 = l_{12}\sqrt{\frac{N_{12}}{EI}}$$

Efortul axial în elementele înclinate este egal cu :

$$N_{12} = \frac{Q}{2\cos 45^\circ} = \frac{0{,}6\ \pi^2\ EI}{\sqrt{2}\ l_{12}^2} = 4{,}2\ \frac{EI}{l_{12}^2}$$

Prin urmare

$$v_0 = l_{12}\sqrt{\frac{4{,}2\,EI}{EI\,l_{12}^2}} = 2{,}05$$

Pentru stâlpi

$$N_{01} = N_{34} = P + \frac{Q}{2} = P + 2{,}96\,\frac{EI}{l_{12}^2}$$

In consecinţă :

$$v_{01} = v_{34} = v = l_{10}\sqrt{\frac{P + 2{,}96\,\frac{EI}{l_{12}^2}}{EI}} = \sqrt{\frac{Pl_{10}^2}{EI} + 2{,}96\,\frac{l_{10}^2}{l_{12}^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{16\,P}{EI} + 2{,}96\cdot\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16\,P}{EI} + \frac{26{,}64}{8}}$$

Sistemul de calcul este reprezentat în fig. 109 a, cifrele care indică rigiditatea fiecărei bare sunt încadrate în dreptunghiuri.

Diagramele unitare sunt înfăţişate în fig. 109 b, c şi d.

Momentele la capetele barelor înclinate sunt calculate ţinând seama de forţele de compresiune :

$$M_1 = 4\,i\,\varphi_2\,(v_0) = 4\cdot 0{,}236\,\varphi_2\,(2{,}05) = 0{,}944\cdot 0{,}851 = 0{,}803\,;$$
$$M_2 = 2\,i\,\varphi_3\,(v_0) = 2\cdot 0{,}236\,\varphi_3\,(2{,}05) = 0{,}472\cdot 1{,}080 = 0{,}510\,.$$

Din diagramele lui $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ şi $\overline{M}_3$, găsim :

$$r_{11} = 0{,}803 + \varphi_2\,(v) \qquad r_{12} = 0{,}510\,;$$
$$r_{22} = 1{,}606\,; \qquad r_{23} = 0{,}510\,;$$
$$r_{33} = 2{,}303\,. \qquad r_{13} = 0\,.$$

Ecuaţia de stabilitate (149)

$$\begin{vmatrix} 0{,}803 + \varphi_2\,(v) & 0{,}510 & 0 \\ 0{,}510 & 1{,}606 & 0{,}510 \\ 0 & 0{,}510 & 2{,}303 + \varphi_2\,(v) \end{vmatrix} = 0$$

se transformă în următoarea ecuaţie de gradul al doilea :

$$\varphi_2^2\,(v) + 2{,}78\,\varphi_2\,(v) + 1{,}35 = 0$$

din care obţinem :

$$\varphi_2\,(v) = -1{,}39 \pm \sqrt{1{,}932 - 1{,}350} = -1{,}390 \pm 0{,}763$$

La forţa critică minimă corespunde rădăcina :

$$\varphi_2\,(v) = -0{,}627$$

Din tabloul 2 (a se vedea anexa) găsim

$$v = 5{,}11$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare

$$5{,}11 = \sqrt{\frac{16\,P}{EI} + \frac{26{,}64}{8}}$$

de unde

$$P_{cr} = 1{,}42\,EI\,.$$

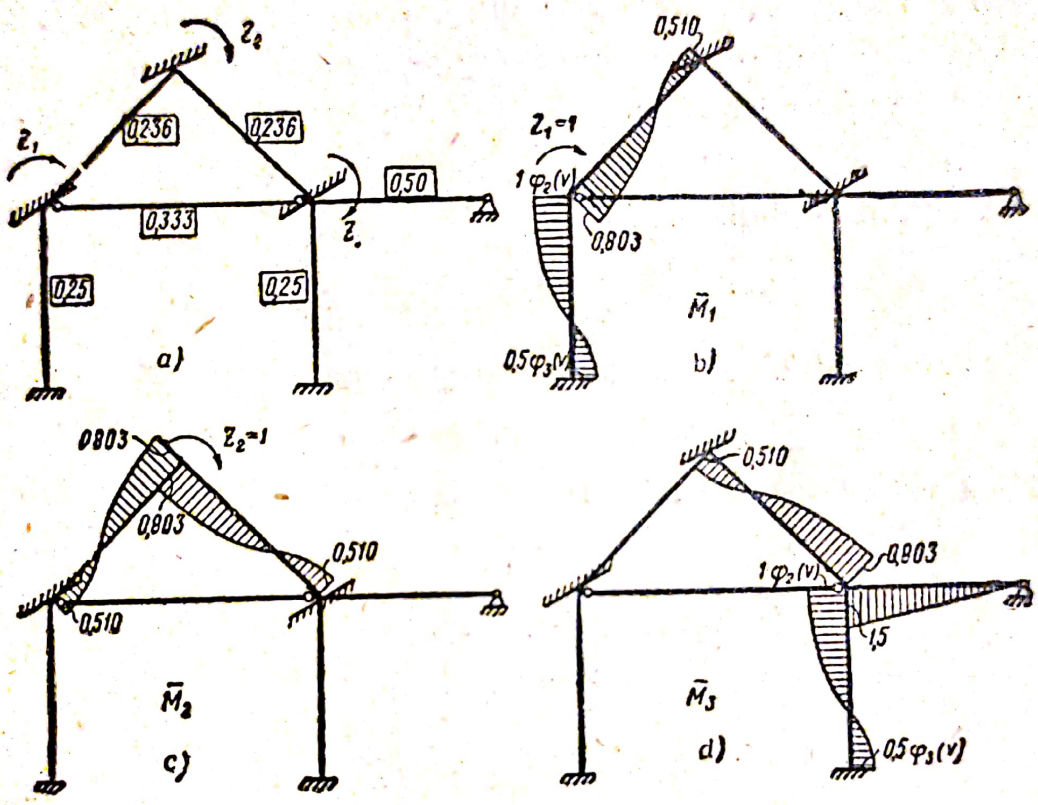


Fig. 109

§ 29. Folosirea simetriei

La calculele de stabilitate cu metoda deplasărilor, ca şi cu metoda forţelor, folosirea simetriei este posibilă numai în cazul unei încărcări simetrice. La o încărcare simetrică se pot produce în momentul pierderii stabilităţii, atât deformaţii simetrice, cât şi antisimetrice. In cazul general nu se poate stabili, a priori, la care anume fel de deformaţie corespunde încărcarea critică, deci trebuesc examinate ambele feluri de deformaţii.

In fig. 110 este reprezentat un cadru simetric cu încărcare simetrică. Sistemul de calcul cu gruparea necunoscutelor este înfăţişat în fig. 111.

Cifrele indicând rigidităţile elementelor sunt încadrate în dreptunghiuri pe figură.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru toți stâlpii, valorile argumentelor v sunt identice.

$$v_1 = \sqrt{\frac{P \cdot 6^2}{0{,}75\ EI}} = \sqrt{\frac{48 \cdot P}{EI}} = v;$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{1{,}5\ P \cdot 8^2}{2\ EI}} = \sqrt{\frac{48 \cdot P}{EI}} = v.$$

In fig. 112 sunt reprezentate diagramele unitare $\overline{M}_1$ și $\overline{M}_2$ corespunzătoare grupării simetrice a necunoscutelor.

Din aceste diagrame găsim:

$$r_{11} = 3{,}5 + \varphi_2(v); \quad r_{22} = 4 + 2\varphi_2(v); \quad r_{12} = r_{21} = 1$$

Ecuația de stabilitate (149)

$$D = \begin{vmatrix} 3{,}5 + \varphi_2(v) & 1 \\ 1 & 4 + 2\,\varphi_2(v) \end{vmatrix} = 0$$

se transformă într'o ecuație de gradul al doilea:

$$\varphi_2^2(v) + 5{,}5\varphi_2(v) + 6{,}5 = 0$$

la care rădăcina cea mai mică este egală cu

$$\varphi_2(v) = -2{,}75 + \sqrt{7{,}56 - 6{,}5} = -1{,}72$$

Din tabloul 2 (a se vedea anexa) găsim:

$$v = 5{,}59$$

și

$$P_{cr} = \frac{v^2\ EI}{l^2} = \frac{5{,}59^2\ (0{,}75\ EI)}{6^2} = 0{,}651\ EI$$

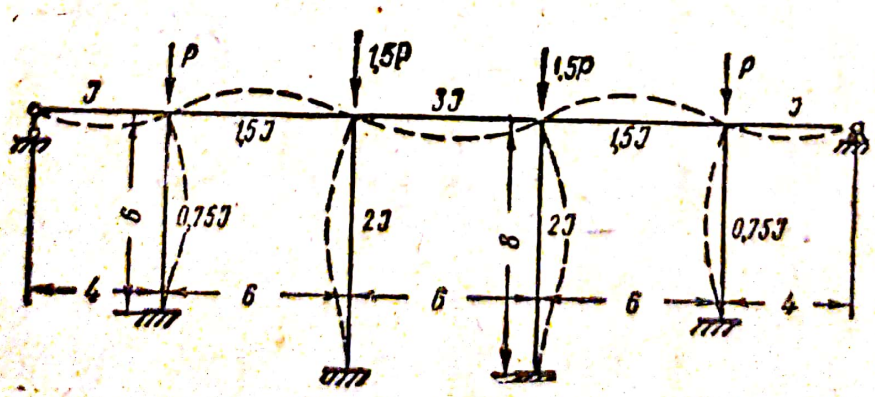


Fig. 110

Vom examina acum gruparea antisimetrică a necunoscutelor. Din diagramele unitare $\overline{M}_3$ și $\overline{M}_4$ (fig. 113) găsim:

$$r_{33} = 3{,}5 + \varphi_2(v); \quad r_{44} = 8 + 2\,\varphi_2(v); \quad r_{34} = r_{43} = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația de stabilitate (149)

$$D = \begin{vmatrix} 3{,}5 + \varphi_2(v) & 1 \\ 1 & 8 + 2\,\varphi_2(v) \end{vmatrix} = 0$$

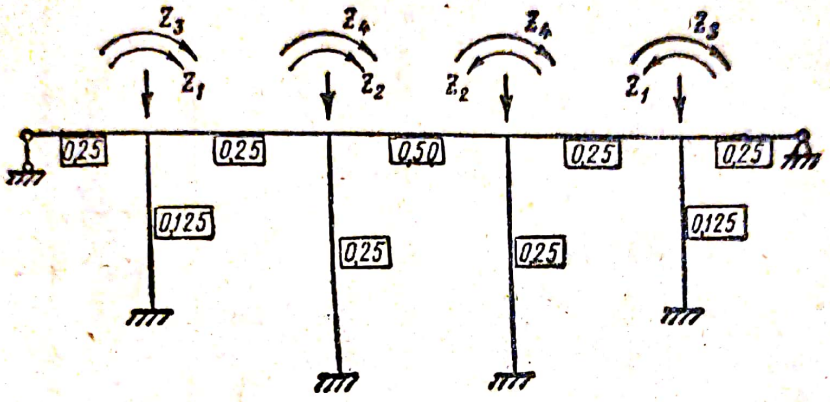


Fig. 111

se transformă în ecuația:

$$\varphi_2^2(v) + 7{,}5\,\varphi_2(v) + 13{,}5 = 0$$

din care rezultă:

$$\varphi_2(v)_{min} = -3{,}75 + \sqrt{3{,}75^2 - 13{,}5} = -3{,}00.$$

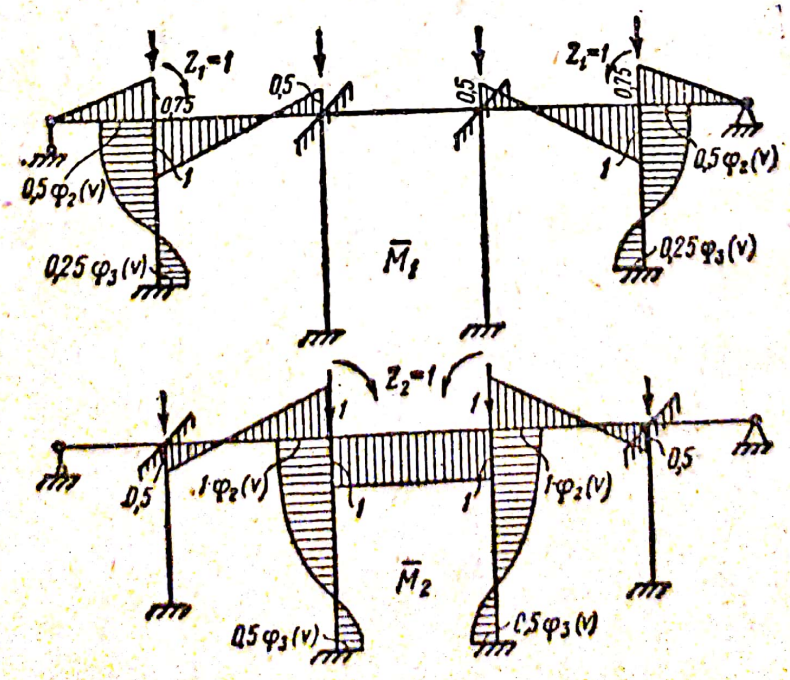


Fig. 112

Din tabloul 2 (din anexă) obținem:

$$\nu = 5{,}83$$

$$P_{cr} = \frac{5{,}83^2\,(0{,}75\,EI)}{6^2} = 0{,}708\ EI.$$

Astfel pentru formele simetrice de pierdere a stabilității:

$$P_{cr} = 0{,}651\ EI,$$

iar pentru cele antisimetrice:

$$P_{cr} = 0{,}708\ EI$$

Forța critică minimă

$$P_{cr} = 0{,}651\ EI$$

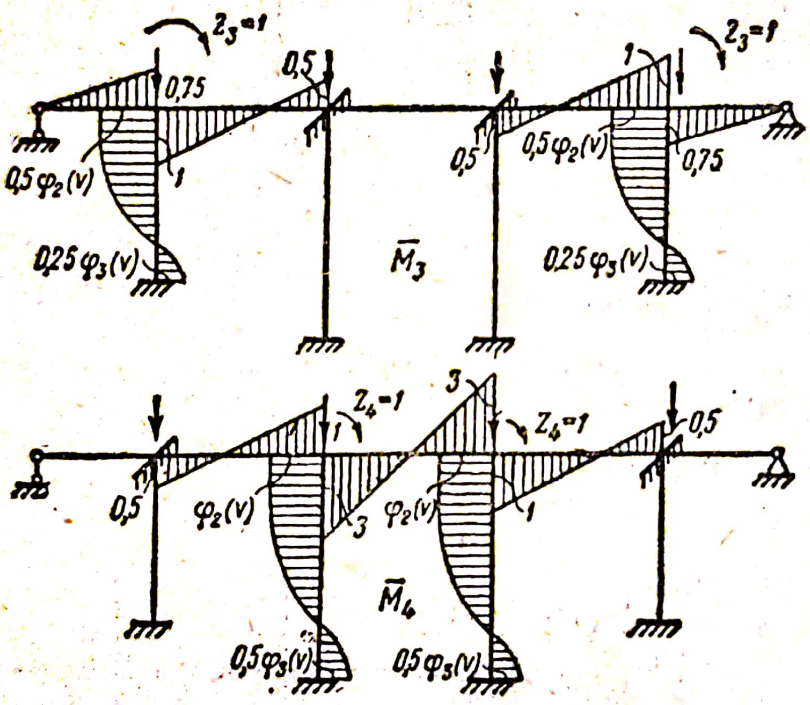


Fig. 113

corespunde cu forma de pierdere a stabilității, arătată cu linii punctate în fig. 110.

Probleme și exerciții

11. Să se stabilească forța critică (cu metoda forțelor) pentru cadrul reprezentat în fig. 83, alegând sistemul de calcul ca în fig. 84 (varianta II)

Răspuns:

$$P_{cr} = 7{,}78\,\frac{EI}{l^2}$$

12. Folosind metoda forțelor, să se determine $P_{cr.\,min}$ pentru cadrul înfățișat în fig. 114.

Răspuns: Ecuația de stabilitate este

$$2 + \theta_1(\nu) = 0$$

iar forța critică

$$P_{cr\,min} = 3{,}7 \cdot \frac{EI}{l^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

13. Aplicând metoda forțelor, se cere să se determine forța critică pentru cadrul înfățișat în fig. 115.

Răspuns :

$$P_{cr} = 9{,}3\,\frac{EI}{l^2} = 1{,}03\ EI$$

14. Să se stabilească P_{cr} pentru cadrul reprezentat în fig. 115, cunoscând că în punctul E există o articulație.

Răspuns :

$$P_{cr} = 9\,\frac{EI}{l^2} = EI.$$

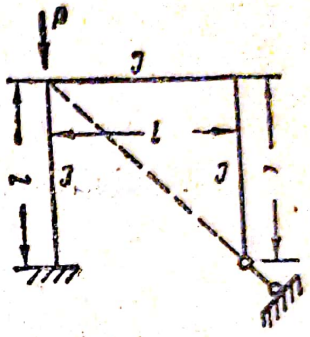


Fig. 114

15. Să se alcătuiască ecuația de stabilitate pentru cadrul înfățișat în fig 116 și anume în două ipoteze :

1) considerând $I_0 = \infty$
2) considerând $I_0 = 0$.

Răspuns : Cazul întâi

$$\begin{vmatrix} 12+z & 2 \\ 2 & 7+z \end{vmatrix} = 0$$

Cazul al doilea

$$\begin{vmatrix} 11+z & 2 \\ 2 & 7+z \end{vmatrix} = 0$$

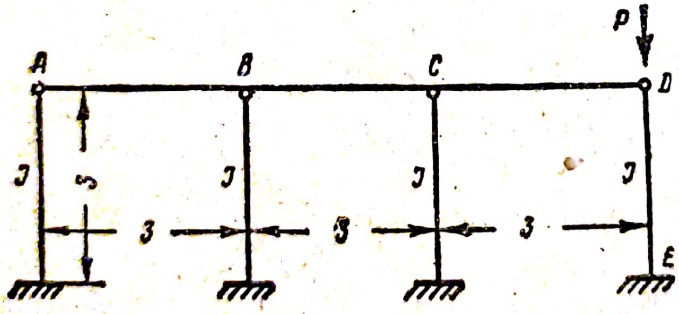


Fig. 115

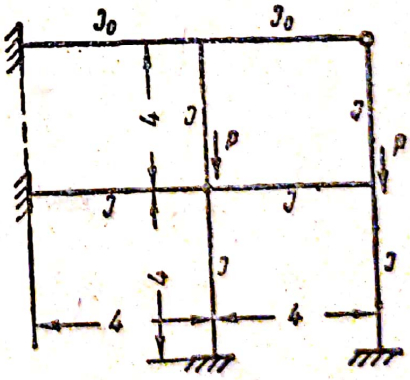


Fig. 116

In ambele cazuri se adoptă următoarele notații :

$$z = 4\,\varphi_2(v)$$

$$v = l\sqrt{\frac{P}{EI}} = 4\sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 5

STABILITATEA BARELOR PE REAZIME ELASTICE

§ 30. Bară cu un singur reazim elastic

Pentru determinarea forței critice a unei bare cu un singur reazim elastic (fig. 117) vom aplica metoda deformațiilor. Sistemul principal precum și diagramele unitare sunt reprezentate în fig. 118.

Din diagrame găsim (§ 27)

$$r_{11} = 2\frac{3i}{l_1^2}\eta_1(v) + c = \frac{6EI}{l_1^3}\eta_1(v) + c;$$

$$r_{22} = 2\cdot 3i\,\varphi_1(v) = \frac{6EI}{l_1}\varphi_1(v);$$

$$r_{12} = r_{21} = 0.$$

În aceste expresii

$$v = l_1\sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}};$$

c este rigiditatea resortului (reacțiunea resortului la scurtarea lui egală cu unitatea).

Ecuația de stabilitate (149)

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{6\,EI}{l_1^3}\eta_1(v) + c & 0 \\ 0 & \frac{6\,EI}{l_1}\varphi_1(v) \end{vmatrix} = 0$$

se transformă în două egalități:

$$\eta_1(v) = -\frac{cl^3}{48\,EI} \qquad (167)$$

și

$$\varphi_1(v) = 0 \qquad (168)$$

La fiecare din aceste ecuații corespunde o formă proprie de deformație.

La ecuația (167) corespunde forma simetrică de deformație (fig. 117, curba *I*).

La ecuaţia (168) corespunde forma antisimetrică de deformaţie (fig. 117, curba *II*).

La deformaţia de acest fel, reazimul elastic nu se deplasează, iar forţa critică este egală cu

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_1^2}$$

Din ecuaţia (167) se poate determina forţa critică la oricare rigiditate a resortului c, folosind în acest scop tabloul 2 (din anexă).

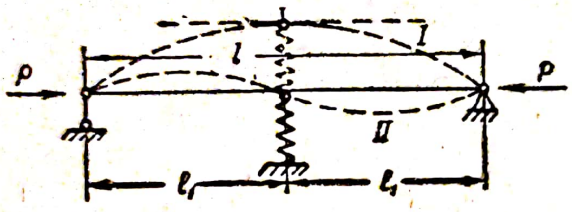


Fig. 117

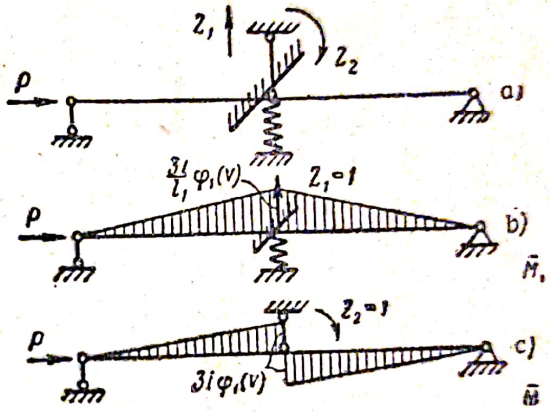


Fig. 118

La o rigiditate oarecare a resortului, forţa critică corespunzătoare la ambele tipuri de deformaţie este aceeaşi $\left(\frac{\pi^2 EI}{l_1^2}\right)$.

Aceasta se întâmplă atunci când $v = \pi$.

Insă în acest caz

$$\eta_1(v) = -\frac{\pi^2}{3}$$

şi prin urmare

$$c = \frac{16\,\pi^2 EI}{l^3} \qquad (169)$$

Când $c < \frac{16\,\pi^2 EI}{l^3}$ încovoierea se produce cu o singură semiundă cu deformarea reazimului elastic. Când $c > \frac{16\,\pi^2 EI}{l^3}$ rigiditatea reazimului elastic nu mai influenţează asupra valorii forţei critice, întrucât forţa critică minimă va avea loc la deformaţia după două semiunde, cu punctul de inflexiune în dreptul reazimului elastic. Astfel, formula (169) va da valoarea limită a rigidităţii reazimului, la care reazimul elastic influenţează asupra valorii forţei critice.

Fig. 119 reprezintă o diagramă care arată influenţa rigidităţii reazimului elastic asupra forţei critice.

Ca exemplu, să considerăm cazul de pierdere a stabilităţii unei

diagonale dintr'o grindă cu zăbrele sistem Howe, atunci când contradiagonala are efort nul.

Astfel contradiagonala cu momentul de inerţie I_1 (fig. 120) reprezintă un reazim elastic.

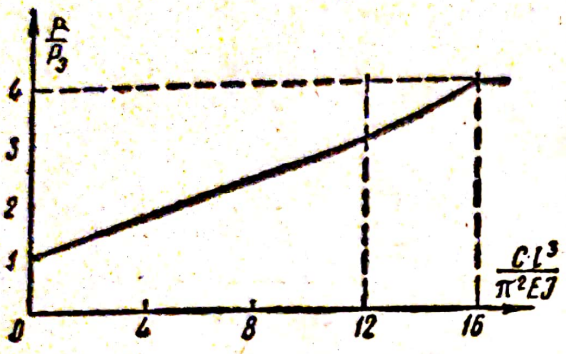


Fig. 119

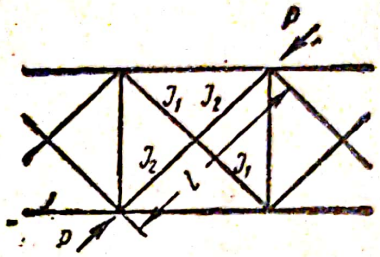


Fig. 120

Coeficientul de elasticitate al reazimului este egal cu :

$$c = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{48\,EI_1}{l^3}$$

Din ecuaţia (167) găsim

$$\eta_1(v) = -\frac{I_1}{I_2}$$

La diagonale cu rigiditate egală $I_1 = I_2$, $\eta(v) = -1$.

Folosind tabloul 2 (din anexă), găsim

$$v = 2{,}2 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

de unde

$$P_{cr} = \frac{4\,(2{,}2^2)\,EI}{l^2}$$

Coeficientul lungimii de flambaj este egal cu :

$$\mu = \frac{\pi}{4{,}4} = 0{;}714$$

Valoarea coeficientului lungimii de flambaj μ variază în raport cu schimbarea raportului $\frac{I_1}{I_2}$. In tabloul 10 sunt date valorile lui μ corespunzătoare la diferite valori ale raportului $\frac{I_1}{I_2}$.

Tabloul 10

$\frac{I_1}{I_2}$	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,00	2,00	3,00
μ	0,950	0,912	0,845	0,818	0,793	0,750	0,714	0,586	0,516

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea minimă a coeficientului lungimii de flambaj va fi $\mu = 0{,}5$ la care corespunde

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\pi^2}{3} = 3{,}2898$$

Mărirea ulterioară a rigidității contradiagonalei nu mai poate spori valoarea forței critice a diagonalei comprimate. Cu datele din tabloul 10, s'a construit o diagramă, reprezentată în fig. 121.

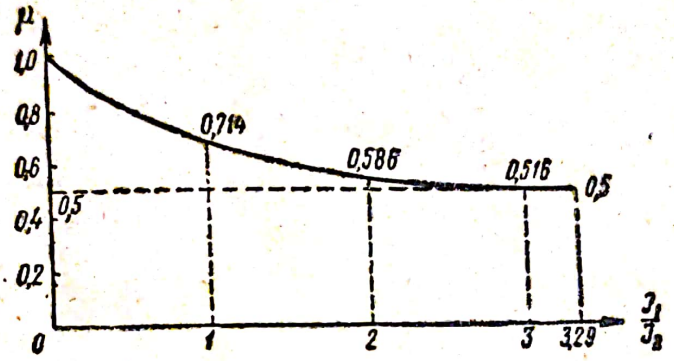


Fig. 121

§ 31. Stabilitatea diagonalelor comprimate într'o grindă cu zăbrele sistem multiplu

Diagonalele comprimate într'o grindă cu zăbrele sistem multiplu, reprezintă grinzi pe reazime elastice. De exemplu diagonala comprimată *AB* are reazime intermediare *a* și *b* în punctele de îmbinare cu montanții (fig. 122), sau cu contradiagonalele (fig. 123).

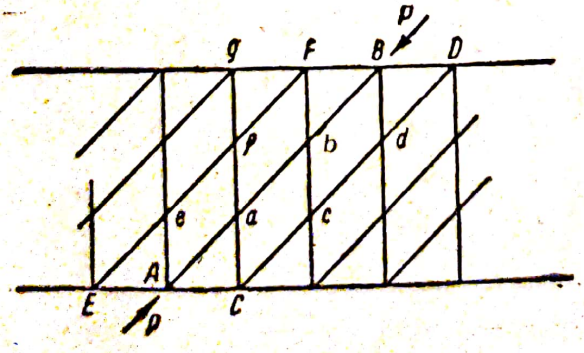


Fig. 122

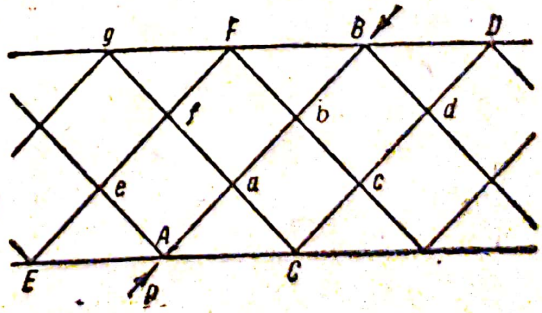


Fig. 123

In ambele cazuri reprezentate în fig. 122 și 123, vom considera că reacțiunile elementelor zăbrelelor în punctele *e*, *f*, *a*, *b*, *c* și *d* sunt identice și în afară de aceasta, vom neglija forțele axiale în elementele contradiagonalelor.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci o diagonală comprimată poate fi considerată ca o grindă cu două reazime elastice, după cum se arată în fig. 124. Coeficienții de elasticitate se vor stabili din condițiile de deformație simetrică a contradiagonalei sau a montantului.

Din fig. 125 obținem

$$EI\,\delta_{11} = EI_1\,2\,\delta = 2\,\frac{1}{3}\left(\frac{l_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{l_1}{3}\right)^3 - \frac{5}{81}\,l_1^3$$

de unde

$$\delta = \frac{5}{162}\,\frac{l_1^3}{EI}.$$

Coeficientul de rigiditate al reazimului va fi

$$c = \frac{1}{\delta} = \frac{162}{5}\,\frac{EI_1}{l_1^3} \qquad (170)$$

în care I_1 și l_1 sunt respectiv momentul de inerție și lungimea contradiagonalei.

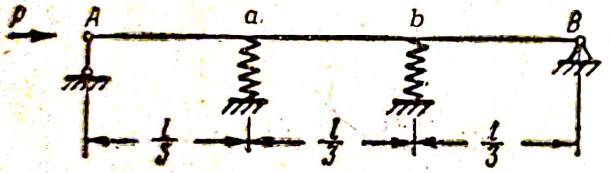


Fig. 124

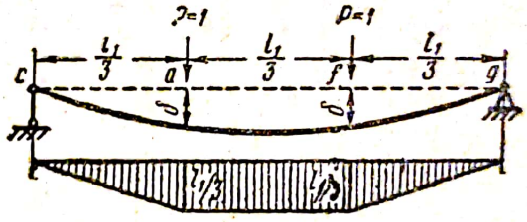


Fig. 125

Să examinăm acum cazul flambajului barei cu o singură seminudă. Vom aplica metoda deplasărilor. Sistemul de calcul și diagramele nnitare sunt reprezentate în fig. 126. Din acestea găsim :

$$r_{11} = 2\left[\frac{81\,EI}{l^3}\,\eta_1(v) + c\right] = \frac{6\,EI}{l}\cdot\frac{27}{l^2}\left[\eta_1(v) + \rho\right];$$

$$r_{22} = \frac{6\,EI}{l}\left[4\,\varphi_2(v) - 2\,\varphi_3(v) + 3\,\varphi_1(v)\right];$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{6EI}{l}\left[\frac{9}{l}\,\varphi_1(v)\right]$$

în care

$$v = \frac{l}{3}\sqrt{\frac{P}{EI}}; \qquad \rho = \frac{cl^3}{81EI} = \frac{2}{5}\,\rho_0; \qquad \rho_0 = \frac{I_1\,l^3}{l_1^3\,I}$$

Ecuația de stabilitate (149)

$$D = \begin{vmatrix} \frac{27}{l^2}\left[\eta_1(v) + \rho\right] & \frac{9}{l}\,\varphi_1(v) \\ \frac{9}{l}\,\varphi_1(v) & \left[4\,\varphi_2(v) - 2\,\varphi_3(v) + 3\,\varphi_1(v)\right] \end{vmatrix} = 0$$

se transformă în următoarea ecuație

$$\rho_0 = \frac{5}{2}\,\frac{3\,\varphi_1(v) - \eta_1(v)\,[4\,\varphi_2(v) - 2\,\varphi_3(v) + 3\,\varphi_1(v)]}{4\,\varphi_2(v) - 2\,\varphi_3(v) + 3\,\varphi_1(v)} \tag{171}$$

în care

$$\rho_0 = \frac{I_1 l^3}{l_1^3 I} \quad \text{și} \quad v = \frac{l}{3}\sqrt{\frac{P}{EI}} \tag{172}$$

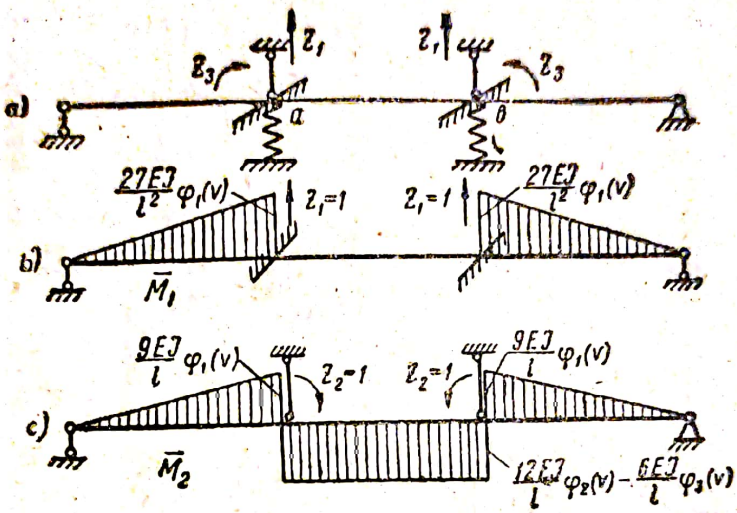


Fig. 126

Determinăm din ecuația (171) valoarea lui v și folosind egalitatea (172) obținem :

$$P_{cr} = \frac{9\,v^2\,EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu\,l)^2} \tag{173}$$

în care

$$\mu = \frac{\pi}{3\,v} \tag{174}$$

In tabloul 11 sunt indicate valorile lui ρ_0 determinate după formula (173) pentru diferite valori ale lui v și valorile corespunzătoare ale lui μ

Tabloul 11

v	$\frac{\pi}{3} = 1{,}045$	1,1	1,20	1,30	1,40	1,50	1,70	2,00	3,14
ρ_0	0	0,10	0,31	0,54	0,79	1,06	1,64	2,67	—
μ	1	0,952	0,873	0,806	0,748	0,698	0,616	0,524	0,333

Pe baza acestor date s'a construit o diagramă (fig. 128.)

Pe lângă forma de deformație simetrică trebue să examinăm și pe cea antisimetrică.

In fig. 127 sunt reprezentate diagramele unitare ale momentelor, din care găsim :

$$r_{11} = \frac{6EI}{l}\left[\frac{27}{l^2}\eta_1(v) + \frac{216}{l^2}\eta_2(v) + \frac{27}{l^2}\rho\right];$$

$$r_{22} = \frac{6\,EI}{l}\left[4\varphi_2(v) + 2\varphi_3(v) + 3\varphi_1(v)\right] = \frac{6\,EI}{l}3\left[2\varphi_4(v) + \varphi_1(v)\right];$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{6\,EI}{l}\left[\frac{9}{l}\varphi_1(v) - \frac{36}{l}\varphi_4(v)\right].$$

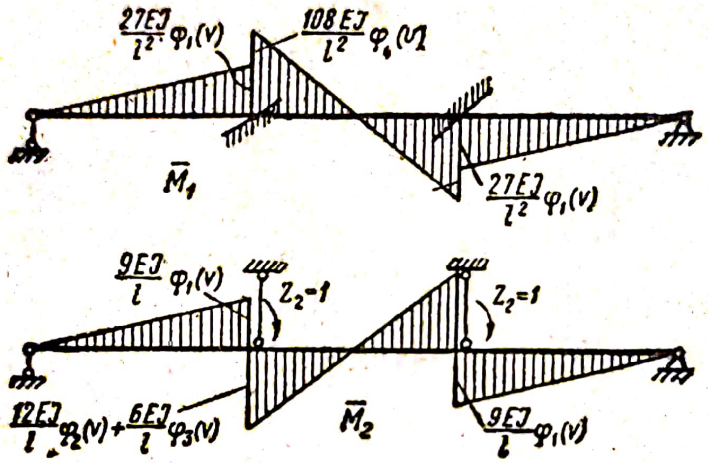


Fig. 127

Ecuaţia de stabilitate

$$D = \begin{vmatrix} \left[\frac{27}{l^2}\eta_1(v) + \frac{216}{l^2}\eta_2(v) + \frac{27}{l^2}\rho\right] & \left[\frac{9}{l}\varphi_1(v) - \frac{36}{l}\varphi_4(v)\right] \\ \left[\frac{9}{l}\varphi_1(v) - \frac{36}{l}\varphi_4(v)\right] & 3\left[2\varphi_4(v) + \varphi_1(v)\right] \end{vmatrix} = 0$$

se transformă în expresia :

$$\rho_0 = \frac{5}{2}\,\frac{\left[\left[\varphi_1(v) - 4\varphi_4(v)\right]^2 - \left[\eta_1(v) + 8\eta_2(v)\right]\cdot\left[2\varphi_4(v) + \varphi_1(v)\right]\right]}{2\varphi_4(v) + \varphi_1(v)} \qquad (175)$$

In această expresie ρ_0 şi v au aceiaşi semnificaţie ca şi în formulele precedente.

De asemenea

$$\mu = \frac{\pi}{3v}.$$

Curba reprezentativă a ecuaţiei (175) este înfăţişată în fig. 128 (curba *II*). Din diagramă rezultă că până la valoarea $\rho_0 = 3$, trebue să aplicăm formula (171).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru diagonalele comprimate raportul $\rho_0 = 3$ se prezintă în puține cazuri, prin urmare, în mod practic formula (175) se va întrebuința destul de rar.

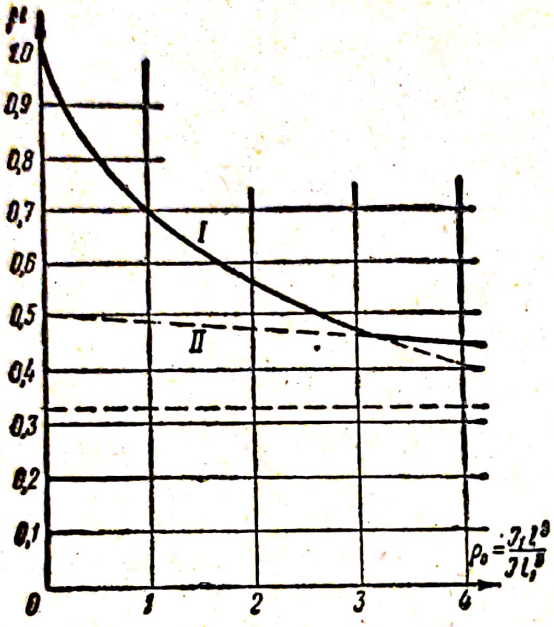


Fig. 128

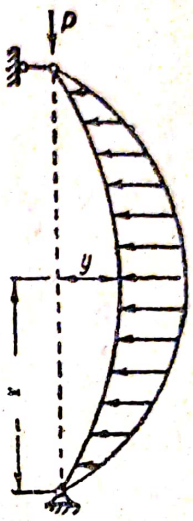


Fig. 129

§ 32. Stabilitatea unei bare în mediu elastic

Pentru determinarea forței critice a unei bare care se găsește într'un mediu elastic (fig. 129), a cărui reacțiune este proporțională cu deformația, vom aplica metoda energetică.

Alegem pentru ecuația de deformație o curbă sinusoidală:

$$y = a \sin \frac{m \pi x}{l} \tag{176}$$

Energia de deformație se compune din energia de deformație a barei:

$$U_1 = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 \, dx = \frac{\pi^4 \, EI}{4 \, l^3} a^2 m^4$$

și din energia de deformație a mediului

$$U_2 = \frac{\beta}{2} \int_0^l y^2 \, dx = \frac{\beta \, l}{4} a^2$$

în care β este coeficientul de tasare.

Lucrul mecanic al sarcinii P, corespunzător tasării capătului superior al barei este egal cu

$$T = \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 \, dx = \frac{\pi^2 P}{4 l} a^2 m^2$$

Din condiția

$$U_1 + U_2 = T$$

găsim

$$\left[\frac{\pi^4 EI}{4 l^3} m^4 + \frac{\beta l}{4} - \frac{\pi^2 P}{4 l} m^2 \right] a^2 = 0$$

de unde pentru $a \neq 0$, obținem

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left[m^2 + \frac{\beta l^4}{m^2 \pi^4 EI} \right]. \qquad (177)$$

Numărul de semi-unde m ale axei deformate a barei este în funcțiune de coeficientul de tasare β.

Pentru valori mici ale lui β, trebue să admitem $m = 1$.

Valoarea limită a lui β, pentru care deformația se produce cu două semi-unde, se va găsi din condiția când P_{cr} care se determină din formula (177) va avea aceeași valoare atât pentru $m = 1$, cât și pentru $m = 2$. In acest caz se va satisface egalitatea

$$1 + \frac{\beta l^4}{\pi^4 EI} = 4 + \frac{\beta l^4}{4 \pi^4 EI}$$

de unde

$$\beta = \frac{4 \pi^4 EI}{l^4}$$

Astfel, dacă

$$\beta < \frac{4 \pi^4 EI}{l^4}$$

este necesar să admitem $m = 1$, iar în cazul când

$$\beta > \frac{4 \pi^4 EI}{l^4}$$

atunci $m > 1$.

In cazul general, pentru fixarea numărului de semi-unde m, este necesar să avem în vedere că sporirea numărului semi-undelor cu 1, nu influențează valoarea forței critice. In acest caz avem următoarea egalitate

$$m^2 + \frac{\beta l^4}{m^2 \pi^4 EI} = (m+1)^2 + \frac{\beta l^4}{(m+1)^2 \pi^4 EI},$$

$$\frac{\beta l^4}{\pi^4 EI} = m^2 (m^2 + 1)^2 \qquad (178)$$

Astfel, cu dimensiunile date ale barei și coeficientul de tasare β (kg/m^2) valoarea lui m se determină din ecuația (178)[1], după ce, cu ajutorul formulei (177) se stabilește și forța critică.

§ 33. Stabilitatea tălpii superioare a unui pod fără contravântuiri superioare [2]

Talpa superioară a tablierului unui pod fără contravântuiri superioare (fig. 130 a — d) reprezintă o grindă pe reazime elastice (fig. 130 b), încărcată cu sarcini, transmise la noduri prin diagonale. Sarcinile cresc dela mijlocul grinzii înspre reazime. Calculele arată că la un număr mai mare decât 4 panouri, reazimele elastice pot să fie înlocuite cu un mediu elastic, cu coeficientul

$$\beta = \frac{R_o}{d}$$

în care R_o — este reacțiunea montantului la deplasarea unitară a nodului.

d — lungimea panoului.

Reacțiunea montantului poate să fie determinată cu ajutorul formulei $R_o = \frac{1}{\delta}$, în care δ este deplasarea provocată de o forță unitară (fig. 130 d).

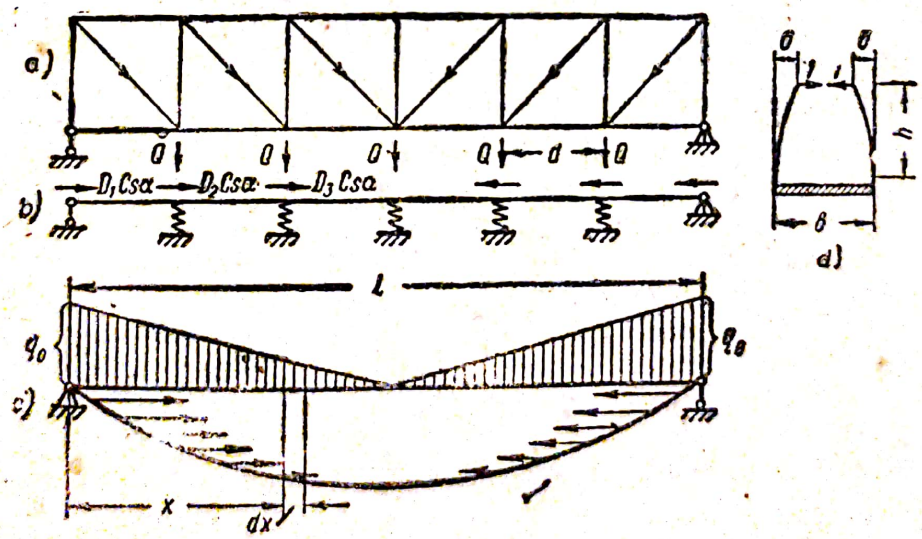


Fig. 130

Să notăm cu: I_1 — momentul de inerție al montantului; h — înălțimea montantului; I_2 — momentul de inerție al antretoazei; b — lungimea antretoazei.

---

[1]) In cazul general valoarea lui m va fi fracționară. La determinarea forței critice, m trebue să fie rotunjit la valoarea minimă cea mai apropiată; de exemplu: dacă din formula (178) rezultă $m = 3{,}86$, trebue să-l rotunjim la $m = 3$.

[2]) Această problemă a fost rezolvată pentru prima oară de F. S. Iasinschi.

Reacțiunea montantului la deplasarea unitară a nodului superior este egală cu

$$R_o = \frac{1}{\frac{h^3}{3EI_1} + \frac{h^2 b}{2EI_2}}$$

Dacă înlocuim forțele concentrate, care cresc dela mijloc înspre reazime, cu o încărcare distribuită după un triunghiu (fig. 130 c), atunci rezolvarea problemei de stabilitate a tălpii superioare se poate face cu metoda energetică, care duce la soluționarea ecuației:

$$U_1 + U_2 = T \tag{179}$$

în care U_1 este energia de încovoiere a grinzii;
U_2 — energia deformației mediului și
T — lucrul mecanic al încărcării.

Intensitatea încărcării q_x într'o secțiune oarecare se determină din egalitatea

$$q_x = \frac{q_o}{l}(l - 2x)$$

Lucrul mecanic al încărcării, aplicată pe lungimea $l - x$ și la înclinarea elementului considerat dx, va avea următoarea formă:

$$dT = -\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \int_x^l \frac{q_o}{l}(l-2x)\,dx = \frac{q_o}{2l}\,x\,(l-x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

Lucrul mecanic total va fi:

$$T = \frac{q_o}{2l}\int_o^l x\,(l-x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \tag{180}$$

Energia de încovoiere a barei

$$U_1 = \frac{EI}{2}\int_o^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \tag{181}$$

Energia de deformație a mediului

$$U_2 = \frac{\beta}{2}\int_o^l y^2\,dx \tag{182}$$

Substituind valorile (180), (181) și (182) în egalitatea (179), obținem ecuația de stabilitate

$$\frac{EI}{2}\int_o^l (y'')^2\,dx + \frac{\beta}{2}\int_o^l y^2\,dx = \frac{q_o}{2l}\int_o^l x\,(l-x)\,(y'')^2\,dx \tag{183}$$

Scanned with OKEN Scanner

Alegând drept curbă a încovoierii, ecuația seriei

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k \pi x}{l} \tag{184}$$

S. P. Timoșhenko a determinat :

$$\left(\frac{q_0 l}{4}\right)_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{\pi^2 (1+\gamma)}{2\left(\frac{\pi^2}{3} - 1\right)} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \tag{185}$$

în care

$$\mu = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\left(\frac{\pi^2}{3} - 1\right)}{1+\gamma}} \tag{186}$$

și

$$\gamma = \frac{\beta l^4}{\pi^4 EI} \tag{187}$$

Tabloul 12

$\frac{\beta l^4}{16 EI}$	0	5	10	15	22,8	56,5	100	162,8	200	300	500	1000
μ	0,696	0,524	0,443	0,396	0,363	0,324	0,290	0,259	0,246	0,225	0,204	0,174

În tabloul 12 sunt indicate valorile coeficienților lungimii de flambaj μ în funcție de $\frac{\beta l^4}{16 EI}$.

CAPITOLUL 6

STABILITATEA FORMEI PLANE DE INCOVOIERE

§ 34. Ipoteze de calcul

De obiceiu, la proiectarea grinzilor sau barelor supuse la încovoiere într'un singur plan XY, se caută ca să se mărească cât mai mult momentul de inerţie I_z al secţiunii lor transversale, rezultatul fiind sporirea rigidităţii EI_z faţă de rigiditatea EI_y. La o diferenţă mare între rigidităţile EI_z şi EI_y, se poate întâmpla ca, sub acţiunea forţelor de compresiune, forma plană de încovoiere (în planul XY) să-şi piardă stabilitatea în porţiunea comprimată a grinzii. Axa grinzii se va curba în planul de rigiditate minimă, iar diferitele secţiuni ale grinzii se vor roti în jurul axei. Astfel, în loc de încovoiere plană, se va produce o încovoiere în două plane însoţită de torsiunea grinzii.

Acest fenomen de pierdere a formei plane, se examinează în ipoteza că deformaţiile în planul de rigiditate minimă nu sunt însoţite şi de deformaţia secţiunii transversale a grinzii, adică se presupune că pierderea stabilităţii nu este însoţită de voalarea inimii, care de altfel constitue o problemă distinctă şi face parte din teoria stabilităţii plăcilor.

§ 35. Stabilitatea inimii unei grinzi la încovoiere pură

Să analizăm stabilitatea unei grinzi în condiţiile încovoierii pure în planul XY (fig. 131). Când momentul M atinge valoarea sa critică

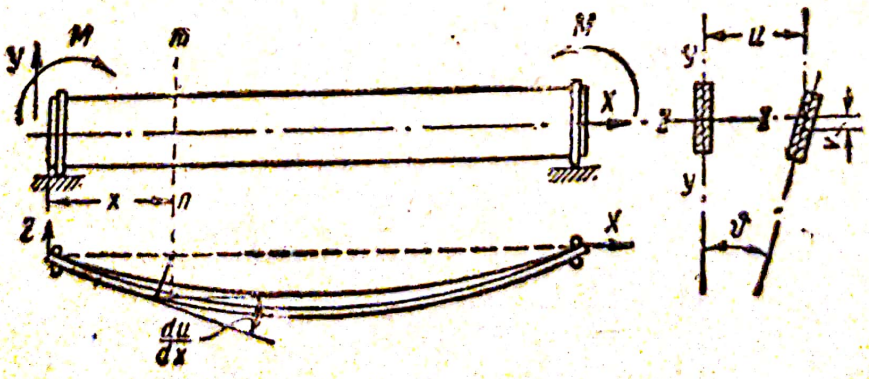


Fig. 131

M_{cr}, inima se deformează lateral, căpătând astfel o încovoiere suplimentară în planul orizontal XZ şi o torsiune faţă de axa X. O secţiune

oarecare m-n va căpăta următoarele deplasări: pe verticală v și pe orizontală u și se va roti cu un unghiu ϑ.

Notăm cu:

EI_z — rigiditatea inimii în raport cu axa Z;
EI_y — rigiditatea inimii în raport cu axa Y;
GC — rigiditatea inimii la torsiune.

Valoarea lui C pentru o inimă subțire cu secțiunea dreptunghiulară poate fi determinată cu ajutorul formulei [1])

$$C = \frac{hb^3}{3}\left(1 - 0{,}630\,\frac{b}{h}\right)$$

în care h și b sunt înălțimea respectiv lățimea secțiunii dreptunghiulare a inimii.

Să considerăm încovoierea inimii în stadiul elastic.

Ecuațiile diferențiale ale încovoierii în două plane și a torsiunii vor avea următorul aspect:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI_z};$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M\sin\vartheta}{EI_y} = \frac{M\vartheta}{EI_y};$$

$$GC \cdot \frac{d\vartheta}{dx} = -M\frac{du}{dx}$$

Pentru determinarea valorii momentului critic este suficient să considerăm ultimele două ecuații, care sunt ecuațiile deformațiilor care apar în momentul pierderii stabilității.

Eliminăm variabila u, în care scop luăm prima derivată a ultimei ecuații:

$$GC\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = -M\frac{d^2u}{dx^2}$$

Substituind în această ecuație valoarea lui $\frac{d^2u}{dx^2}$ din a doua ecuație de echilibru, obținem

$$GC\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = -\frac{M^2\vartheta}{EI_y}$$

sau

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} + n^2\vartheta = 0 \qquad (188)$$

în care

$$n = M\sqrt{\frac{1}{EI_y\,GC}}. \qquad (189)$$

[1]) S. P. Timoshenko „Teoria elasticității", ONTI, 1937 pag. 277.

Integrala ecuației (188)

$$\vartheta = A_1 \cos nx + A_2 \sin nx$$

conține două constante de integrare, care se determină din condițiile limită:

pentru $x = 0$, $\vartheta = 0$

pentru $x = l$, $\vartheta = 0$

Prima condiție este îndeplinită când $A_1 = 0$. Din condiția a doua obținem:

$$A_2 \sin nl = 0$$

Dacă $A_2 = 0$, atunci inima va suferi o încovoiere plană pură, deci rămâne să mai admitem că

$$\sin nl = 0 \tag{190}$$

Această condiție este îndeplinită atunci când

$$nl = \pi, 2\pi, \ldots\ldots$$

Rădăcina cea mai mică corespunde pentru $nl = \pi$.

Ținând seama de valoarea lui n (189) obținem

$$M_{cr} = \frac{\pi EI_y}{l}\sqrt{\frac{GC}{EI_y}} \tag{191}$$

Formula (191) corespunde cu articulația extremităților barei pentru încovoierea în planul orizontal și cu o încastrare pentru torsiunea barei.

Pentru o bară cu capetele încastrate, momentul critic se determină cu ajutorul următoarei formule:

$$M_{cr} = \frac{2\pi EI_y}{l}\sqrt{\frac{GC}{EI_y}} \tag{192}$$

Din formulele (191) și (192) rezultă că *momentul critic depinde de rigiditatea minimă.*

§ 36. Stabilitatea inimii la compresiune excentrică

In fig. 132 este reprezentată inima unei grinzi supusă la o forță excentrică de compresiune aplicată în planul rigidității maxime. Când forța P atinge valoarea critică, inima se deformează lateral, adică apare o încovoiere în planul rigidității minime, însoțită de o torsiune în raport cu axa longitudinală.

Spre deosebire de problema precedentă, momentul încovoietor în secțiunea m-n în planul rigidității minime va fi egal cu

$$M_x = M\vartheta - Pu$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile diferențiale ale încovoierii și torsiunii se vor scrie în acest caz astfel :

$$EI_y \frac{d^2u}{dx^2} = M\vartheta - Pu ;$$

$$GC \frac{d\vartheta}{dx} = - M \frac{du}{dx}$$

Luăm derivata primei ecuații

$$EI_y \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d\vartheta}{dx} M - P \frac{du}{dx}$$

și substituim în ea din a doua ecuație pe

$$\frac{d\vartheta}{dx} = - \frac{M}{GC} \cdot \frac{du}{dx}$$

Obținem

$$\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{M^2}{EI_y GC} \left(1 + \frac{P \cdot GC}{M^2} \right) \frac{du}{dx} = 0 \qquad (193)$$

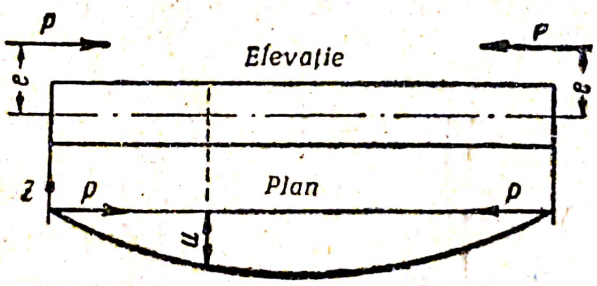


Fig. 132

Notând

$$\frac{du}{dx} = \omega \qquad (194)$$

și

$$\frac{M^2}{EI_y GC} \left(1 + \frac{P \cdot GC}{M^2} \right) = n^2 \qquad (195)$$

obținem

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + n^2\omega = 0$$

Integrala acestei ecuații va avea următorul aspect :

$$\omega = A_1 \cos nx + A_2 \sin nx$$

Introducem condiţiile limită :

$$\text{pentru} \quad x = 0 ; \qquad \frac{d\omega}{dx} = 0$$

$$\text{pentru} \quad x = l ; \qquad \frac{d\omega}{dx} = 0$$

ca şi în cazul precedent (§ 35) şi obţinem ecuaţia caracteristică

$$\sin nl = 0$$

Pentru $nl = \pi$, obţinem

$$\frac{M^2_{cr}}{EI_y GC} \left(1 + \frac{P_{cr} GC}{M^2_{cr}} \right) = \frac{\pi^2}{l^2}$$

sau

$$M^2_{cr} + P_{cr} GC = \frac{\pi^2 EI_y GC}{l^2} \tag{196}$$

Ecuaţia (196) este satisfăcută în cele două cazuri examinate mai sus :

1) excentricitatea $e = 0$, adică $M = 0$;

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}$$

2) forţa de compresiune lipseşte, adică $P = 0$, ceea ce corespunde cu cazul încovoierii pure (a se vedea § 35) :

$$M_{cr} = \frac{\pi EI_y}{l} \sqrt{\frac{GC}{EI_y}}$$

Formula (196) este aplicabilă şi în cazul acţiunii simultane a compresiunii şi a încovoierii. Se pot prezenta trei cazuri :

1) pentru o valoare dată a lui P se determină momentul critic,
2) pentru o valoare dată a momentului M se determină P_{cr} şi
3) cunoscând raportul între moment şi forţă, se determină parametrul critic.

§ 37. Stabilitatea unei grinzi cu secţiune dreptunghiulară, sub acţiunea sarcinilor transversale

Să examinăm cazul încovoierii unei grinzi provocată de o forţă concentrată, aplicată în centrul secţiunii dela mijlocul grinzii (fig. 133). Când forţa P atinge valoarea critică, grinda se va încovoia lateral.

Păstrând notaţiile de mai sus, obţinem următoarele expresii ale momentelor :

Momentul încovoietor în raport cu axa corespunzătoare rigidităţii minime (în planul XZ) este

$$M = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) ,$$

Momentul de torsiune

$$M_{tors} = -\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)\frac{du}{dx} + \frac{P}{2}(\delta - u)$$

în care δ este deplasarea a orizontală secţiunii dela mijlocul grinzii.

In acest caz, ecuaţiile diferenţiale ale încovoierii şi torsiunii se vor scrie astfel :

$$EI_y \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)\vartheta ;$$

$$GC\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)\frac{du}{dx} + \frac{P}{2}(\delta - u)$$

Eliminând din aceste ecuaţii valoarea $\frac{du}{dx}$, obţinem

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} + \frac{P^2}{4EI_y GC}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 \vartheta = 0 \qquad (197)$$

Integrarea acestei ecuaţii se poate face cu ajutorul seriilor infinite

$$\vartheta = A\left(1 - \frac{k^2}{3\cdot 4}w^4 + \frac{k^4}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}w^8 - \frac{k^6}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}w^{12} + \ldots\right) +$$

$$+ B\left(w - \frac{k^2}{4\cdot 5}w^5 + \frac{k^4}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}w^9 - \frac{k^6}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13}\cdot w^{13} + \ldots\right),$$

în care

$$w = \frac{l}{2} - x ; \qquad k^2 = \frac{P^2}{4EI_y GC}$$

Condiţiile limită pentru această problemă sunt următoarele :

pentru $x = 0$; $\quad w = \frac{l}{2}$, $\quad \frac{d\vartheta}{dx} = 0$

pentru $x = \frac{l}{2}$; $\quad w = 0$, $\quad \vartheta = 0$

Din a doua condiţie limită rezultă că valoarea constantă A trebue să fie egală cu zero. Din prima condiţie obţinem

$$B\left(1 - \frac{m}{4} + \frac{m^2}{4\cdot 5\cdot 8} - \frac{m^3}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12} + \ldots\right) = 0 \qquad (198)$$

în care

$$m = \frac{k^2\cdot l^4}{8} = \frac{P^2 l^4}{64 EI_y GC} . \qquad (199)$$

Momentul de torsiune

$$M_{tors} = -\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)\frac{du}{dx} + \frac{P}{2}(\delta - u)$$

în care δ este deplasarea a orizontală secțiunii dela mijlocul grinzii.

In acest caz, ecuațiile diferențiale ale încovoierii și torsiunii se vor scrie astfel :

$$EI_y \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)\vartheta ;$$

$$GC\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)\frac{du}{dx} + \frac{P}{2}(\delta - u)$$

Eliminând din aceste ecuații valoarea $\frac{du}{dx}$, obținem

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} + \frac{P^2}{4\,EI_y\,GC}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2\vartheta = 0 \qquad (197)$$

Integrarea acestei ecuații se poate face cu ajutorul seriilor infinite

$$\vartheta = A\left(1 - \frac{k^2}{3\cdot4}w^4 + \frac{k^4}{3\cdot4\cdot7\cdot8}w^8 - \frac{k^6}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}w^{12} + \ldots.\right) +$$

$$+ B\left(w - \frac{k^2}{4\cdot5}w^5 + \frac{k^4}{4\cdot5\cdot8\cdot9}w^9 - \frac{k^6}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}\cdot w^{13} + \ldots.\right),$$

în care

$$w = \frac{l}{2} - x\ ; \qquad k^2 = \frac{P^2}{4\,EI_y\,GC}$$

Condițiile limită pentru această problemă sunt următoarele :

pentru $x = 0$; $\quad w = \frac{l}{2}$, $\quad \frac{d\vartheta}{dx} = 0$

pentru $x = \frac{l}{2}$; $\quad w = 0$, $\quad \vartheta = 0$

Din a doua condiție limită rezultă că valoarea constantă A trebue să fie egală cu zero. Din prima condiție obținem

$$B\left(1 - \frac{m}{4} + \frac{m^2}{4\cdot5\cdot8} - \frac{m^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12} + \ldots.\right) = 0 \qquad (198)$$

în care

$$m = \frac{k^2\cdot l^4}{8} = \frac{P^2\,l^4}{64\,EI_y\,GC}\ . \qquad (199)$$

Egalitatea (198) poate să fie satisfăcută în două cazuri:

1) $B = 0$, ceea ce corespunde cu starea de echilibru stabil și

2) expresia din paranteze este egală cu zero, ceea ce reprezintă ecuația caracteristică de stabilitate a formei plane de încovoiere a unei grinzi.

Limitându-ne la primii trei termeni ai seriei (198) obținem o ecuație de gradul al doilea în raport cu m;

$$m^2 - 40\,m + 160 = 0$$

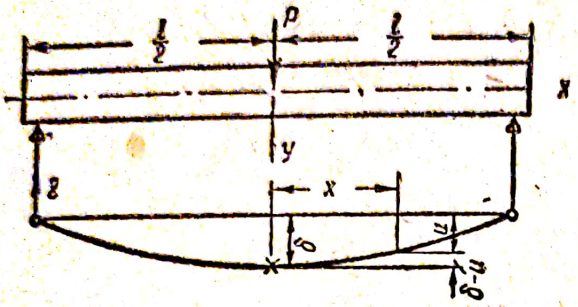


Fig. 133

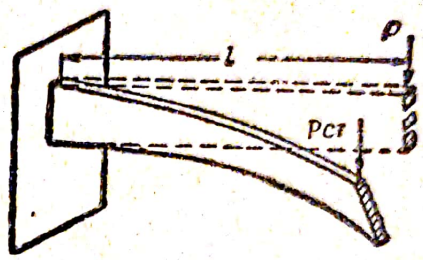


Fig. 134

la care rădăcina cea mai mică este:

$$m = 20 - \sqrt{400 - 160} = 4{,}508$$

Din expresia (199) găsim

$$P_{cr} = \frac{8\sqrt{m}}{l^2}\sqrt{EI_y GC} = \frac{16{,}98\,EI_y}{l^2}\sqrt{\frac{GC}{EI_y}}$$

Dacă asupra grinzii acționează o sarcină uniform repartizată. atunci încărcarea critică va avea următoarea valoare

$$(ql)_{cr} = \frac{28{,}3\,EI_y}{l^2}\sqrt{\frac{GC}{EI_y}} \qquad (200)$$

Pentru o grindă în consolă, încărcată la capăt (fig. 134) forța critică va fi egală cu

$$P_{cr} = \frac{4{,}01\,EI_y}{l^2}\sqrt{\frac{GC}{EI_y}}. \qquad (201)$$

§ 38. Stabilitatea transversală la încovoiere a grinzilor cu profil I.

Momentul de torsiune exterior, aplicat la o grindă cu profil I este echilibrat cu următoarele momente ale eforturilor interioare și anume:

1) printr'un moment care apare datorit eforturilor tangențiale, provocate de torsiune:

$$M_1 = GC_1\frac{d\vartheta}{dx}$$

în care ϑ este unghiul de torsiune, iar GC_1 — rigiditatea la torsiune.

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea lui C_1 poate fi stabilită, în mod aproximativ, ca și pentru secțiuni subțiri alcătuite din trei dreptunghiuri[1])

$$C_1 = \frac{2}{3} bt^3 + \frac{1}{3} ht_1^3 \qquad (202)$$

în care b este lățimea, iar t grosimea tălpilor; t_1 și h grosimea, respectiv înălțimea inimii;

2) printr'un moment care apare la încovoierea tălpilor

$$M_2 = Qh$$

în care Q este forța tăietoare în talpă.

Având în vedere că deplasarea tălpilor față de centrul de greutate al profilului I este:

$$u_1 = -\vartheta \cdot \frac{h}{2}$$

obținem

$$Q = ED \frac{d^3 u_1}{dx^3} = -ED \cdot \frac{h}{2} \frac{d^3\vartheta}{dx^3}$$

și apoi

$$M_2 = -ED \frac{h^2}{2} \frac{d^3\vartheta}{dx^3}$$

In această expresie

$$D \approx \frac{tb^3}{12}$$

Momentul de torsiune total va fi egal cu suma

$$M_1 + M_2 = GC_1 \frac{d\vartheta}{dx} - ED \frac{h^2}{2} \frac{d^3 \cdot \vartheta}{dx^3}$$

In cele ce urmează vom examina trei cazuri de încovoiere a unei grinzi cu profil I.

a) Incovoiere pură

Ecuațiile diferențiale ale încovoierii, în raport cu axa corespunzătoare rigidității minime, și a torsiunii sunt:

$$EI_y \frac{d^2u}{dx^2} = M\vartheta; \quad GC_1 \frac{d\vartheta}{dx} - ED \frac{h^2}{2} \frac{d^3\vartheta}{dx^3} = -M \frac{du}{dx}$$

Eliminând din aceste ecuații $\frac{du}{dx}$, obținem

$$\frac{d^4\vartheta}{dx^4} - \frac{2\,GC_1}{h^2 ED} \frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \frac{2M^2}{E^2 DI_y h^2} \vartheta = 0$$

---

[1]) Vezi Lucrarea „Rezistență materialelor" de S. P. Timoșenco vol I. pag 75 (1932).

Scanned with OKEN Scanner

Integrala generală a acestei ecuații are următorul aspect:

$$\vartheta = A_1 \sin mx + A_2 \cos mx + A_3 \operatorname{sh} nx + A_4 \operatorname{ch} nx,$$

în care

$$m^2 = \frac{2GC_1}{h^2ED}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{DM^2h^2}{2G^2C_1^2I_y}}\right); \qquad (203)$$

$$n^2 = \frac{2GC_1}{h^2ED}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{D \cdot M^2h^2}{2G^2C_1^2I_y}}\right)$$

Folosind condițiile limită (fig. 131)

pentru $x = 0$; $\quad \vartheta = 0 \quad$ și $\quad \dfrac{d^2\vartheta}{dx^2} = 0$

pentru $x = l \quad \vartheta = 0 \quad$ și $\quad \dfrac{d^2\vartheta}{dx^2} = 0$

obținem ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} \sin ml & 2 \operatorname{sh} nl \\ m^2 \sin ml, & 2n^2 \operatorname{sh} nl \end{vmatrix} = 0$$

care este satisfăcută când $\sin ml = 0$, la care valoare corespunde rădăcina cea mai mică $m = \dfrac{\pi}{l}$.

Substituind aceste valori în expresia (203) obținem

$$M_{cr} = \frac{\pi EI_y}{l}\sqrt{\frac{GC_1}{EI_y}\left(1 + \frac{\pi^2}{\gamma}\right)} \qquad (204)$$

în care

$$\gamma = \frac{2GC_1l^2}{EDh^2} \qquad (205)$$

Vom scrie expresia (204) sub următoarea formă

$$M_{cr} = K\frac{1}{l}\sqrt{EI_y GC_1} \qquad (206)$$

Coeficientul de stabilitate K depinde de valoarea lui γ.

In tabloul 13 sunt notate valorile lui K în funcțiune de γ.

Tabloul 13

γ	0,1	1,0	2	4	8	16	32	100	∞
K	31,4	10,36	7,66	5,85	4,70	4,00	3,59	3,29	π

Scanned with OKEN Scanner

b) Incovoierea produsă de o forţă concentrată situată la mijlocul deschiderii

După cum se arată în fig. 133, la valoarea critică a forţei P grinda I se voalează. Forţa critică se determină cu ajutorul expresiei :

$$P_{cr} = K\frac{1}{l^2}\sqrt{EI_y\ GC} \qquad (207)$$

în care coeficientul de stabilitate K depinde de asemenea de valoarea lui γ şi figurează în tabloul 14.

Tabloul 14

γ	0,4	4	8	16	32	64	160	400	∞
K	86 4	31,9	25,6	21,8	19,6	18,3	17,5	17,2	16,93

c) Incovoierea provocată de o sarcină uniform repartizată

Pentru acest caz încărcarea critică se determină din formula

$$(ql)_{cr} = K\frac{EI_y}{l^2}\sqrt{\frac{GC_1}{EI_y}} \qquad (208)$$

Valorile coeficientului de stabilitate K sunt indicate în tabloul 15 în funcţiune de γ.

Tabloul 15

γ	0,4	4	8	16	32	64	128	400	∞
K	143	53	42,6	36,3	32,6	30,5	29,4	28,6	28,3

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

Dinamica construcţiilor face parte din cursul de Mecanica Construcţiilor. In Statica Construcţiilor orice sistem elastic se consideră sub acţiunea unor sarcini statice a căror valoare şi poziţie nu se schimbă în funcţie de timp. Asemenea sarcini se întâlnesc destul de rar. In mod obişnuit acţiunea unei sarcini asupra unei construcţii este însoţită de şocuri, vibraţii, etc. în unele cazuri încărcarea se aplică brusc şi provoacă vibraţii în toată construcţia.

Deformaţiile şi solicitările provocate de acţiunea încărcării, care se schimbă în funcţie de timp, adică a unei *încărcări dinamice,* variază de asemenea în funcţie de timp.

Următoarele feluri de sarcini dinamice se prezintă mai des inginerului constructor.

Acţiunea cu şocuri care provine, de exemplu, dela o locomotivă care trece peste rosturile şinilor, ori dela un ciocan cu aburi, sau dela o sonetă, etc. Acţiunea şocului poate să fie *mobilă* sau *fixă*, ea poate să se repete *periodic* la anumite intervale de timp.

Dintre acţiunile cu şocuri fac parte *şocurile seismice* şi *şocurile provocate de explozii.*

Solicitarea prin vibraţii provoacă schimbări periodice de intensitate. O astfel de solicitare provine dela maşini şi mecanisme cu elemente în rotaţie (electromotoare, diferite maşini-unelte, etc.) şi cu piese care au mişcări de rotaţie şi translaţie (maşini cu aburi, compresoare, maşini-unelte, etc.). Variaţia în timp a acestor solicitări se explică prin necompensarea dinamică a pieselor în mişcare.

Solicitările prin vibraţii constitue pentru construcţii un pericol special, întrucât particularitatea principală a acestor solicitări constă în faptul că rezistenţele şi deformaţiile pe care le provoacă nu sunt în raport direct cu intensitatea solicitării. In unele cazuri o solicitare prin vibraţii destul de redusă poate să provoace deplasări şi eforturi considerabile.

Pentru ca să studiem cât mai complet toate stările de solicitare ale unei construcţii, este nevoie se efectuăm şi calculele dinamice.

Calculul dinamic diferă de cel static prin faptul că la stabilirea ecuaţiei de echilibru trebue să mai adăugăm şi forţele de inerţie. In cazul când forţele acţionează într'un plan, ecuaţia de echilibru dinamic va avea următorul aspect:

$$\sum X - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ sau } \sum X - m\ddot{x} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad \text{sau} \quad \sum Y - m\ddot{y} = 0$$

$$\sum M - \theta\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad \text{sau} \quad \sum M - \theta\ddot{z} = 0$$

În aceste ecuații s'au adoptat următoarele notații : $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, sunt derivatele de ordinul al doilea în raport cu timpul. (aceste notații se folosesc și în cele ce urmează).

θ — momentul de inerție al masei, egal cu

$$\theta = \int r^2 dm$$

în care r este distanța elementului masei dela axa de rotație :

$\ddot{z}$ — unghiul de rotire față de axa de rotație

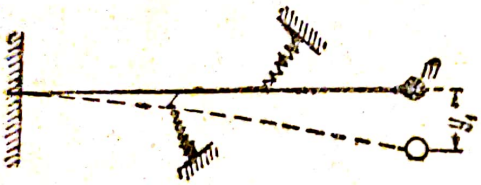


Fig. 1

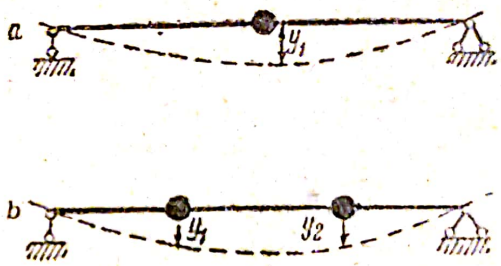


Fig. 2

Calculul construcțiilor la sarcini dinamice se poate face și pe baza *principiului de conservare a energiei,* după care suma energiei potențiale U și a energiei cinetice V trebue să fie constantă :

$$U + V = \text{const.} \qquad (1)$$

sau

$$U + \frac{1}{2}\int v^2 dm = \text{const.}$$

în care v este vitesa elementului masei dm.

Valoarea energiei potențiale a construcției se determină cu metodele obișnuite ale staticii construcțiilor, prin lucrul mecanic al forțelor interioare sau exterioare.

In calculele dinamice, construcțiile se clasifică după *numărul gradelor de libertate.*

Numărul gradelor de libertate ale unui sistem elastic este numărul parametrilor independenți necesari pentru determinarea deplasării maselor la care se reduce sistemul pentru orice deformație elastică.

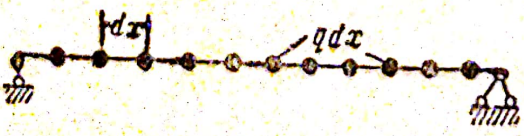


Fig. 3

De exemplu, poziția axei unei bare care are o masă relativ mică, a cărei influență se poate neglija (*o bară fără greutate* fig. 1), care este încastrată rigid la un capăt și rezemată elastic în două puncte, se determină prin valoarea unei singure deplasări verticale y_1 pe care o va căpăta masa m.

Grinda la care neglijăm greutatea proprie, rezemată în două puncte cu o masă concentrată aplicată pe ea (fig. 2 a) reprezintă un sistem cu un singur grad de libertate, întrucât deplasările tuturor punctelor axei ei se pot determina prin deplasarea y_1, a punctului de aplicație al masei. Insă aceeași grindă (fig. 2 b) cu două mase aplicate pe ea, reprezintă un sistem cu două grade de libertate, deoarece deplasarea fiecărui punct al grinzii depinde de deplasările y_1 și y_2 ale punctelor de aplicație ale ambelor mase. Dacă se ține seama de greutatea proprie q_x a grinzii, această greutate se poate considera ca un număr infinit de mare de forțe $q_x\,dx$ și atunci o asemenea grindă reprezintă un sistem cu un număr infinit de mare de grade de libertate. (fig. 3) [1]

Calculul la acțiunea sarcinilor dinamice a construcțiilor, la care se ține seamă de greutatea proprie, având deci un număr infinit de grade de libertate este o problemă foarte dificilă și care, uneori, chiar nu se poate soluționa.[2] Asemenea probleme se rezolvă prin metode aproximative. Se recomandă ca studiul bazei calculului dinamic să se înceapă cu sisteme la care se neglijează greutatea proprie și care au deci un singur grad de libertate, trecând apoi treptat la cazurile mai complicate.

1) Pentru explicații mai amănunțite a se vedea § 7.
2) De exemplu, calculul unui pod peste care trece un tren.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I.

VIBRAȚIILE SISTEMELOR CU UN SINGUR GRAD DE LIBERTATE

§ 1. Vibrații libere

Cea mai simplă problemă a vibrației unui sistem cu un singur grad de libertate, este vibrația unei bare elastice la care neglijăm greutatea proprie și având o masă m aplicată pe bară (fig. 4). Dacă într'un asemenea sistem greutatea $P = mg$ aplicată pe bară, va ieși din starea sa de echilibru, atunci tot sistemul va începe să efectueze așa zisele *vibrații (oscilații) libere* sau *proprii*. In raport cu direcția deplasării punctelor, vibrațiile pot să fie longitudinale (fig. 4 a), sau transversale (fig. 4 b). Aceste vibrații se vor produce în jurul poziției de echilibru. In oricare moment, vibrațiile vor depinde de forța produsă de rezistența elastică a barei și de forța de inerție I_m a masei în mișcare.

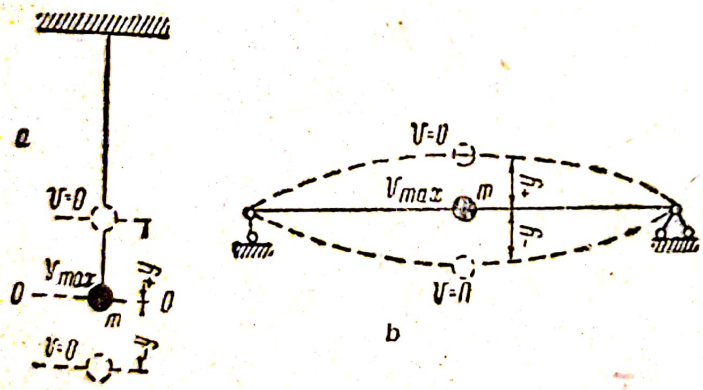


Fig. 4

1) *Forța rezistentă a barei S este proporțională cu deviația masei față de poziția ei de echilibru și se determină cu ajutorul expresiei*

$$S = -\alpha y.$$

Semnul minus arată că direcția forței S este opusă direcției ordonatei deviației y, adică *forța rezistentă este îndreptată întotdeauna înspre poziția de echilibru static al barei* (fig. 5). Stabilind caracterul direcției forței S vom utiliza în cele ce urmează pentru determinarea valorii ei, expresia

$$S = \alpha y,$$

fără a ține seamă de semnul ordonatei y.

Valoarea α caracterizează rigiditatea barei ; *această rigiditate poate să fie considerată ca o forță, care, fiind aplicată pe bară în punctul de fixare al masei, va provoca o deplasare unitară a acestui punct.*

Scanned with OKEN Scanner

Pentru lămurire, vom examina deformaţia grinzii înfăţişată în fig. 6. Ordonata deformaţiei în dreptul punctului de aplicaţie al sarcinii $P = mg$, — după cum se cunoaşte — se determină prin expresia

$$y_a = \frac{Pl^3}{3EI}$$

sau

$$y_a \cdot \frac{3EI}{l^3} = P \qquad (a)$$

Prin urmare rigiditatea grinzii se determină în acest caz prin expresia

$$\alpha = \frac{3EI}{l^3} \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

Astfel, dacă dintr'o cauză oarecare sarcina P a deviat din poziţia de echilibru cu valoarea y, atunci în grindă se va produce rezistenţa $S = \alpha y$.

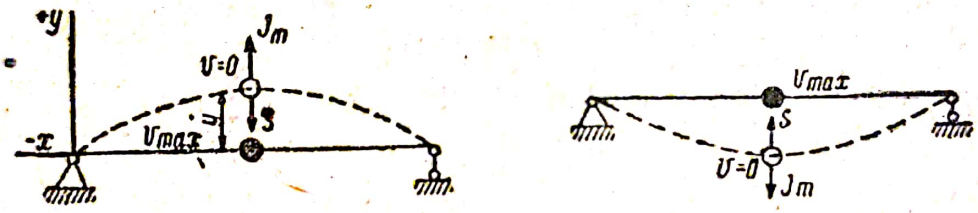


Fig. 5

Indicăm încă o relaţie care determină valoarea lui a. Dacă bara se găseşte sub acţiunea sarcinii $\overline{P} = 1$, aplicată în punctul a, atunci deplasarea acestui punct se va determina prin valoarea δ_a [1], iar deplasarea totală $\triangle_a$ sau săgeata y_a provocată de acţiunea forţei P se stabileşte cu ajutorul expresiei :

$$y_a = \delta_a P$$

sau

$$\frac{y_a}{\delta_a} = P \qquad (b)$$

Comparând expresiile (a) şi (b) rezultă că

$$\alpha = \frac{1}{\delta_a} \qquad (2)$$

2) Forţele de inerţie I_m, după cum se ştie, sunt dirijate întotdeauna în partea opusă acceleraţiei. La vibrarea unei grinzi, vitesa cea mai mare v_{max} se produce întotdeauna la trecerea prin poziţia de echilibru (fig. 4), iar vitesa nulă va fi în punctul de deviaţie maximă.

---

[1]) In cazul de faţă şi în cele ce urmează s'au adoptat următoarele notaţii : δ este deplasarea dată de forţa $P = 1$ şi $\triangle$ — deplasarea totală.

La trecerea barei din poziția de echilibru în poziția extremă, mișcarea este frânată, iar forțele de inerție sunt îndreptate dela poziția de echilibru în afară ; mișcarea de înapoiere se face cu accelerație deci, și aici forțele de inerție vor fi îndreptate tot astfel.

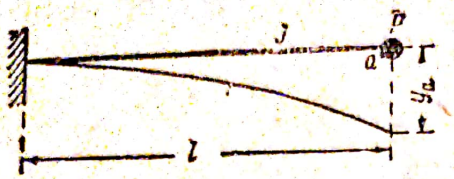


Fig. 6

Prin urmare, *forțele de inerție* I_m *sunt îndreptate întotdeauna dela linia de echilibru static înspre exterior.*

După cum se cunoaște, valoarea acestor forțe se determină cu ajutorul expresiei :

$$I_m = - m \frac{d^2y}{dt^2} = - m\ddot{y}$$

După cum s'a arătat mai sus, în cursul oscilațiilor libere, masa se va găsi în echilibru sub acțiunea forței de inerție și a reacțiunii, ceea ce permite să scriem ecuația de echilibru dinamic (fig. 5).

$$I - S = 0.$$

Făcând substituirea valorilor I și S, obținem

$$m\ddot{y} + \alpha y = 0$$

sau

$$\ddot{y} + \varphi^2 y = 0 \qquad (3)$$

In această expresie

$$\varphi^2 = \frac{\alpha}{m} = \frac{1}{m\delta_a} \qquad (4)$$

Integrala acestei ecuații este funcțiunea

$$y\,(t) = A_1 \cos \varphi t + A_2 \sin \varphi t \qquad (5)$$

care determină poziția masei în oscilație în oricare moment.

Prima derivată a deformației y' în raport cu timpul determină vitesa de vibrație a masei m.

$$y = v = - \varphi A_1 \sin \varphi t + \varphi A_2 \cos \varphi t \qquad (6)$$

Constantele A_1 și A_2 care intră în ecuațiile (5) și (6) se determină prin condițiile inițiale pentru $t = 0$; $y = y_0$ și $v = v_0$.

Atunci din ecuațiile (5) și (6) obținem :

$$A_1 = y_0 \quad \text{și} \quad A_2 = \frac{v_0}{\varphi}$$

Inlocuind

$$y = y_0 \cos \varphi t + \frac{v_0}{\varphi} \sin \varphi t \; ; \qquad (7)$$

$$y = v = - \varphi y_0 \sin \varphi t + v_0 \cos \varphi t \qquad (8)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă admitem că în primul moment $y_0 = 0$, atunci ecuațiile (5) și (7) se vor transforma în următoarea expresie

$$y = A_2 \sin \varphi t = \frac{v_0}{\varphi} \sin \varphi t \qquad (9)$$

De aci rezultă că sub influența masei m, o grindă la care neglijăm greutatea proprie, scoasă din poziția de echilibru, va efectua oscilații simple armonice, în raport cu poziția de echilibru.

Fig. 7 înfățișează curba reprezentativă a ecuației (9). Din diagramă se vede că deviația cea mai mare a masei dela poziția ei de echilibru static este egală cu valoarea constantă

$$A_2 = \frac{v_0}{\varphi}$$

Această valoare poartă denumirea: *amplitudinea oscilației.* Amplitudinea dublată reprezintă distanța între pozițiile extreme ale punctului care oscilează.

Timpul T în secunde, în care grinda face un ciclu complet de oscilații, se numește *perioada oscilațiilor.* Din fig. 7 rezultă că

$$T = \frac{2\pi}{\varphi} \qquad (10)$$

Numărul ciclurilor complete de oscilații într'o unitate de timp se numește *frecvența oscilațiilor.* Dacă drept unitate de timp se iau 2π secunde, atunci frecvența oscilațiilor va fi egală cu coeficientul φ, care intră în ecuația (9). Într'adevăr, din ecuația (10) avem

$$\frac{T}{2\pi} = \varphi. \qquad (11)$$

Frecvența φ, egală cu numărul ciclurilor oscilațiilor în 2π sec. se numește uneori *frecvența circulară.*

Admițând ca unitate de timp un minut, vom obține așa zisa *frecvență tehnică* n, care se determină prin expresia

$$n = \frac{60}{T} = \frac{60}{2\pi} \varphi \qquad (12)$$

Ținând seama de egalitatea (4) și de raportul (2), vom obține următoarele expresii:

1) pentru frecvența oscilațiilor

$$\varphi = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \sqrt{\frac{g}{y_a}} \text{ sec.}^{-1}; \qquad (13)$$

2) pentru perioade

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{y_a}{g}} = \frac{2\pi}{\varphi} \text{ sec}; \qquad (14)$$

Scanned with OKEN Scanner

3) pentru frecvența tehnică

$$n = \frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{y_a}} \tag{15}$$

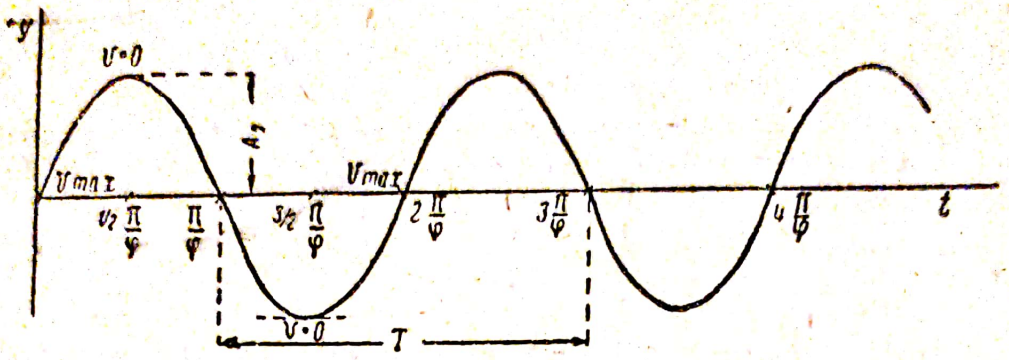


Fig. 7.

Intrucât $g=981 \approx (10\pi)^2$ cm/sec^2, la determinarea numărului de oscilații pe minut la sistemele cu un singur grad de libertate, formula (15) poate să fie înlocuită, cu o aproximație satisfăcătoare, cu formula

$$n = 5 \cdot 60 \sqrt{\frac{g}{(10\pi)^2 y_a}} = \frac{300}{\sqrt{y_a}} \tag{16}$$

în care y_a este deplasarea în cm.

După cum se vede din formula (13) valoarea frecvenței scade cu creșterea y_a a deformației; de aci, rezultă că frecvența minimă și perioada maximă vor corespunde la poziția masei m care provoacă deformația maximă; de exemplu, într'o grindă simplu rezemată, la poziția masei în mijlocul deschiderii.

Ecuațiile (5) și (6), prin substituirea lui

$$A_1 = A \sin \nu \qquad \text{și} \qquad A_2 = A \cos \nu$$

pot să fie transformate astfel:

— deformația

$$y = A \sin (\varphi t + \nu) \tag{17}$$

— vitesa

$$\dot{y} = v = \varphi A \cdot \cos (\varphi t + \nu) \tag{18}$$

— accelerația

$$\ddot{y} = a = -\varphi^2 A \sin (\varphi t + \nu) \tag{19}$$

Ultima ecuație poate să fie adusă la forma următoare

$$\ddot{y} + \varphi^2 y = 0 \tag{20}$$

care coincide exact cu ecuația (3). Prin urmare, ecuațiile (17) — (19) determină elementele aceleeași oscilații armonice. Aceste ecuații împreună cu ecuațiile (5) și (6) se întâlnesc destul de des în literatura tehnică.

Scanned with OKEN Scanner

Din condiţia că:

pentru $t = 0$; $y = y_0$ şi $\dot{y} = v = v_0$

ţinând seamă de expresiile (17) şi (18) obţinem:

$$y_0 = A \sin \nu \quad \text{şi} \quad v_0 = \varphi A \cos \nu$$

şi rezolvând ecuaţiile obţinute, găsim:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\varphi^2}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \tag{21}$$

$$\nu = \operatorname{arctg} \frac{y_0 \varphi}{v_0} \tag{21}$$

în care A este amplitudinea oscilaţiilor,

ν — faza iniţială a oscilaţiilor.

La oscilaţiile grinzii, se petrece procesul de modificare a energiei cinetice, ceea ce permite să tragem anumite concluzii în cele ce urmează. Vom examina acest proces în ce priveşte oscilaţiile libere ale unei grinzi, considerând că în momentul iniţial $t = 0$, ordonata $y_0 = 0$, iar vitesa $v = v_0$. La aceste condiţii iniţiale corespund oscilaţiile determinate prin ecuaţia (9)

$$y = \frac{v_0}{\varphi} \sin \varphi t$$

Conform acestei ecuaţii, deplasarea, vitesa şi acceleraţia în diferite momente au următoarele valori:

Timpul	*Deplasarea*	*Vitesa*	*Acceleraţia*
$t = 0$	$y = 0$	v_0	$\ddot{y} = 0$
$t = \frac{\pi}{2\varphi}$	$y_{max} = \frac{v_0}{\varphi}$	0	$\ddot{y} = -\varphi v_0$
$t = \frac{\pi}{\varphi}$	$y = 0$	$-v_0$	$\ddot{y} = 0$
$t = \frac{3\pi}{2\varphi}$	$y_{max} = -\frac{v_0}{\varphi}$	0	$\ddot{y} = +\varphi v_0$

Din aceste date rezultă că *în momentul devierii maxime a masei din poziţia de echilibru static, vitesa descreşte până la zero., energia cinetică se anulează, iar energia potenţială atinge valoarea maximă,* ceea ce forţează masa să pornească înapoi cu acceleraţia $\ddot{y} = -\varphi v_0$.

In momentul trecerii prin poziţia de echilibru ($y_0 = 0$) energia cinetică atinge maximul, iar energia potenţială este egală cu zero.

Energia cinetică rămasă, provoacă mişcarea masei până în momentul când devine egală cu zero, iar energia potenţială care îşi va atinge maximul impune mişcarea înapoi a masei cu acceleraţia $\ddot{y} = +\varphi v_0$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

In încheere, remarcăm că toate concluziile din paragraful de faţă se aplică la toate felurile de sisteme cu un singur grad de libertate, adică la toate sistemele la care masa se concentrează într'un singur punct; astfel de sisteme pot fi deci considerate ca neavând greutate proprie.

Aceste concluzii sunt valabile în aceeaşi măsură pentru oscilaţiile proprii, care se produc atât în planul vertical cât şi în cel orizontal, sau într'un plan înclinat.

Probleme şi exerciţii

1. O grindă simplu rezemată cu deschiderea l se găseşte sub acţiunea unei sarcini concentrate $P = mg$. Să se determine raportul între frecvenţa proprie în două ipoteze: 1) masa m este situată în mijlocul deschiderii şi 2) masa m se găseşte în sfertul deschiderii.

Greutatea grinzii poate fi neglijată faţă de greutatea sarcinii

Răspuns:

$$\frac{\varphi_{0,5l}}{\varphi_{0,25l}} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{85,3}}$$

2. Să se compare valorile frecvenţelor oscilaţiilor proprii ale unei şi aceleeaşi grinzi cu o masă aplicată la mijloc în următoarele trei cazuri: 1) grinda simplu rezemată pe două reazime; 2) grinda încastrată la un capăt şi articulată la celălalt şi 3) grinda încastrată la ambele capete.

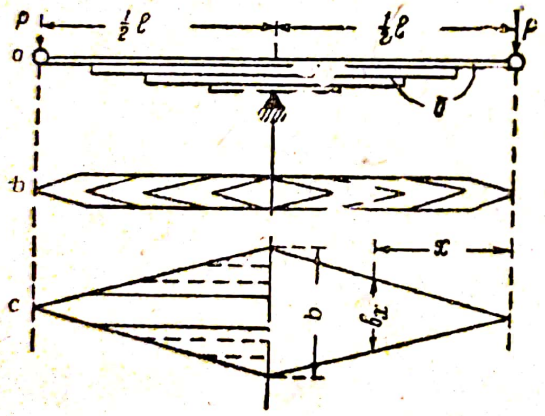


Fig. 8

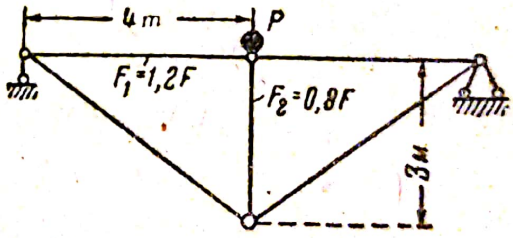


Fig. 9

Răspuns:

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{48EI}{ml^3}};\ \varphi_2 = \sqrt{\frac{109,7EI}{ml^3}},\ :\ \varphi_3 = \sqrt{\frac{192EI}{ml^3}}$$

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 = 1 : 1,51 : 2$$

3. Să se scrie expresia desfăşurată pentru frecvenţa oscilaţiilor proprii ale unui arc cu foi (fig. 8 a). în ipoteza unor oscilaţii simetrice.

Aspectul arcului în plan este înfăţişat în fig. 8b. Grosimea totală a foilor arcului variază după un triunghiu (fig. 8 c).

La oscilaţii simetrice fiecare jumătatea arcului lucrează ca o grindă încastrată la un capăt.[1]

---

[1]) Problema 3 este reprodusă din lucrarea prof. N. I. Bezuhov „Dinamica Construcţiilor în exemple şi probleme" 1947, pag. 11.

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns :

$$\varphi = \sqrt{\frac{4gbE\delta^3}{3Ql^3}}$$

4. Să se determine frecvența oscilațiilor proprii ale sistemului reprezentat în fig. 9, în ipoteza că asupra nodului dela mijlocul lui acționează o sarcină $P = 1$ t. Greutatea proprie a sistemului poate să fie neglijată față de greutatea sarcinii.

Deformația sistemului se determină ca și pentru o fermă obișnuită, cu ajutorul formulei

$$\Delta_{1p} = \sum \frac{\overline{N}_1 N_p}{EF} Sc$$

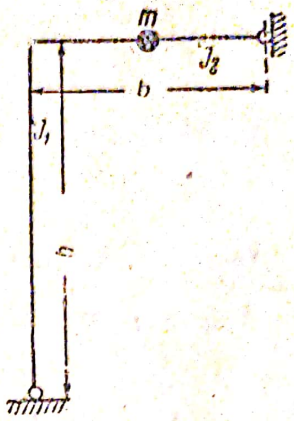


Fig. 10

Răspuns :

$$\varphi = \sqrt{\frac{981EF}{1365}}$$

5. Să se determine frecvența oscilațiilor proprii ale unei bare frânte, reprezentată în fig. 10, sub acțiunea unei mase m, fixată la mijlocul părții orizontale ; raportul $\frac{I_2}{I_1} = K$.

Indicație. Masa barei poate să fie neglijată față de masa m. Bara are un singur grad de libertate, întrucât masa poate să se deplaseze numai în sens vertical. Săgeata barei în dreptul punctului de aplicație al masei se determină pe calea obișnuită.

$$\delta_{aa} = \frac{b^3}{48\,EI} \cdot \frac{hk + \frac{7}{16}b}{hk + b}$$

Răspuns :

$$\varphi = \sqrt{\frac{48\,EI}{mb^3} \cdot \frac{hk + b}{hk + \frac{7}{16}b}}$$

6. Să se alcătuiască expresia frecvenței oscilațiilor proprii ale unui resort având unghiul de înclinare al spirelor foarte mic, pe care sprijină sarcina P.

Dimensiunile resortului de oțel sunt : R — raza resortului r — raza secțiunii transversale ; n — numărul spirelor ; G modulul de elasticitate transversală.

Greutatea resortului nu este mare față de valoarea sarcinii P, astfel încât o putem neglija.

Răspuns :

$$\varphi = \sqrt{\frac{a}{m}} = \sqrt{\frac{Ggr^4}{4PR^3n}}$$

a este coeficientul de rigiditate al resortului care determină valoarea forței necesare pentru comprimarea resortului cu o unitate.

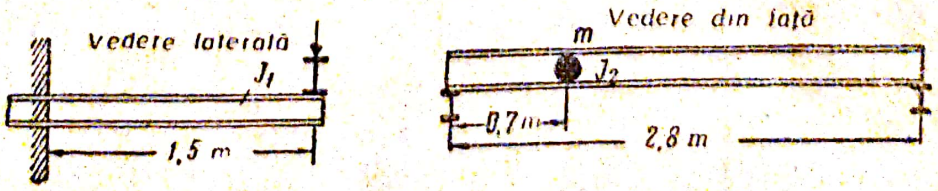


Fig. 11

7. Să se determine frecvența proprie a oscilațiilor unei fundații în ipoteza că coeficientul de tasare (compresiune elastică) al terenului este :

$$k = 0{,}3 \text{ kg/cm}^3 = 300 \text{ t/m}^3$$

Suprafața fundației $F = 18$ m^2 ; masa fundației cu toate instalațiile de pe ea este

$$m = 24 \frac{\text{t} \cdot \text{sec}^2}{\text{m}}$$

Indicație : Terenul de fundație poate să fie considerat ca un resort cu coeficientul de rigiditate kF.

Răspuns :

$$\varphi = 15 \text{ sec}^{-1}$$

8. Să se determine frecvența oscilațiilor proprii ale masei m, care se găsește pe sistemul reprezentat în fig. 11.

Indicație. La determinarea săgeții în dreptul punctului de aplicație al masei, trebue să ținem seama de deformațiile grinzilor în consolă precum și de deformația grinzii principale.

Răspuns : Săgeata în dreptul punctului de aplicație al masei, provocată de forța $P = 1$, este :

$$y = \frac{0{,}257}{EI_2} + \frac{0{,}703}{EI_1}$$

Frecvența oscilațiilor

$$\varphi = \sqrt{\frac{EI_1 I_2}{m\,(0{.}257 I_1 + 0{,}703 I_2)}}$$

§ 2. Oscilații libere amortizate

Concluziile trase din paragraful precedent au arătat că o bară fără greutate, care a început să vibreze, va continua aceste vibrații un timp nelimitat, fără acțiunea vreunei forțe exterioare. In realitate însă, aceasta este imposibil. Vibrațiile barei, scoasă din echilibru se vor amortiza treptat datorită forțelor rezistente, dintre care fac parte rezistența mediului (aerul, etc.), frecarea în porțiunile de rezemare, coeziunea materialului însuși (frecarea interioară), etc.

Influența forțelor rezistente asupra unei bare în vibrație se calculează în ipoteza că forțele de rezistență R sunt proporționale cu vitesa oscilațiilor :

$$R = -\beta \dot{y} \tag{22}$$

în care β este coeficientul, care caracterizează amortizarea oscilațiilor.

Semnul minus este introdus în expresia forțelor rezistente întrucât sensul lor este întotdeauna contrar sensului vitesei.

Când se ține seamă și de forțele rezistente, ecuația (3) se transformă în felul următor :

$$m\ddot{y} + \beta \dot{y} + \alpha y = 0 \tag{23}$$

In această ecuație influența forțelor rezistente este introdusă cu același semn ca și rezistența αy, provocată de rigiditatea grinzii.

Scanned with OKEN Scanner

Admițând că:

$\varphi^2 = \frac{\alpha}{m}$ este pătratul oscilațiilor proprii;

$2k = \frac{\beta}{m}$ — caracteristica rezistenței mediului (24)

obținem

$$\ddot{y} + 2k\dot{y} + \varphi^2 y = 0 \tag{25}$$

Printr' o substituire directă este ușor să ne convingem că integrala acestei ecuații este:

$$y = e^{-kt}\left[B_1 \sin\left(\sqrt{\varphi^2 - k^2}t\right) + B_2 \cos\left(\sqrt{\varphi^2 - k^2}t\right)\right] \tag{26}$$

Vitesa oscilațiilor se determină prin prima derivată

$$\dot{y} = -ky + e^{-kt}\sqrt{\varphi^2 - k^2}\left[B_1 \cos\left(\sqrt{\varphi^2 - k^2}t\right) - B_2 \sin\left(\sqrt{\varphi^2 - k^2}t\right)\right] \tag{27}$$

Constantele B_1 și B_2 care intră în aceste ecuații se determină din condițiile inițiale:

pentru $t = 0$, $y = y_0$ de unde $B_2 = y_0$

pentru $t = 0$ $y = v_0$ de unde $B_1 = \frac{v_0 + ky_0}{\sqrt{\varphi^2 - k^2}}$

Astfel, ecuația (26) se transformă în;

$$y = e^{-kt}\left[\frac{v_0 + ky_0}{\sqrt{\varphi^2 - k^2}} \sin\left(\sqrt{\varphi^2 - k^2}t\right) + y_0 \cos\left(\sqrt{\varphi^2 - k^2}t\right)\right] \tag{28}$$

Dacă $y_0 = 0$, atunci

$$y = e^{-kt} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{\varphi^2 - k^2}} \sin\left(\sqrt{\varphi^2 - k^2}t\right) \tag{29}$$

De asemenea ecuația (28) poate să fie adusă la forma ecuației (17):

$$y = e^{-kt} B \sin\left(\sqrt{\varphi^2 - k^2}t + \nu\right) \tag{30}$$

Să examinăm influența amortizării asupra vibrațiilor unui sistem. Aci sunt posibile două cazuri:

1) când expresia $\varphi^2 - k^2$ este mai mare decât zero și

2) când această expresie este mai mică decât zero.

1. Dacă

$$\varphi^2 - k^2 > 0, \quad \text{adică} \quad \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2} > 0$$

atunci bara vibrează cu perioada

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\varphi^2 - k^2}}$$

după cum se poate deduce din ecuația (28).

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuaţia (28) rezultă că săgeţiile maxime se produc pentru

$$\sin\left(\sqrt{\varphi^2 - k^2}\, t\right) = 1$$

şi se determină cu ajutorul expresiei

$$y_{max} = \frac{v_0}{\sqrt{\varphi^2 - k^2}} e^{-kt} = Ce^{-kt}$$

Dând lui t o serie de valori, ca

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{\varphi^2 - k^2}};\ \frac{5}{2}\frac{\pi}{\sqrt{\varphi^2 - k^2}}, \ldots\ldots, \text{etc.}$$

vom obţine o serie de valori ale lui y^{max}:

$$Ce^{-\frac{k\pi}{2\sqrt{\varphi^2 - k^2}}};\ Ce^{-\frac{5k\pi}{2\sqrt{\varphi^2 - k^2}}};\ Ce^{-\frac{9k\pi}{2\sqrt{\varphi^2 - k^2}}} \text{ etc.}$$

Prin urmare, *oscilaţiile unui sistem se amortizează treptat datorită rezistenţelor şi scad după o progresie geometrică.*

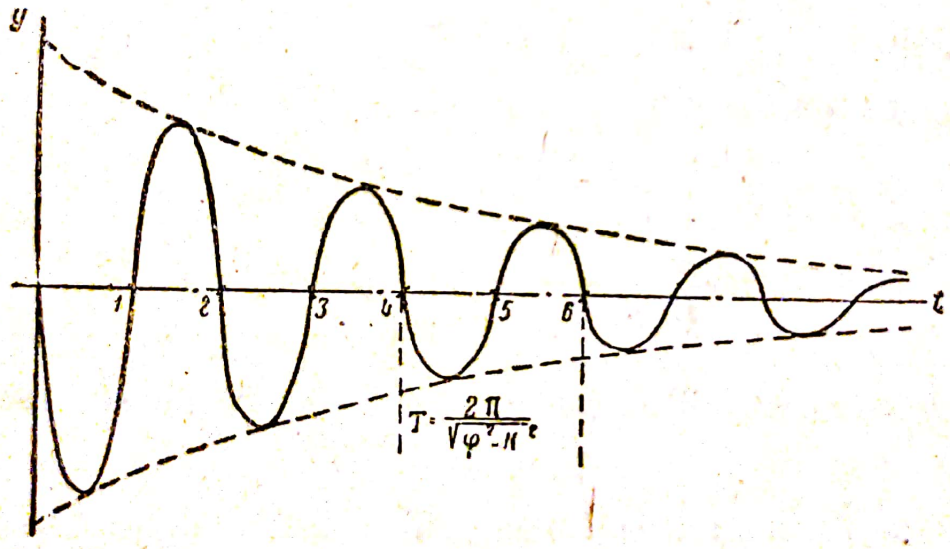


Fig. 12

Fig. 12 reprezintă o diagramă de amortizare a oscilaţiilor, construită după formula (29).

In fig. 13 este înfăţişată o diagramă obţinută pe cale experimentală, arătând amortizarea oscilaţiilor unui pod pe care a căzut o greutate sub forma unui berbec de fontă.[1)]

[1)] Diagrama este extrasă din lucrarea lui S. A. Iliasevici „Bazele calculelor dinamice ale podurilor metalice" 1934, fig. 42.

2) Dacă coeficientul k este foarte mare, iar diferența $\varphi^2 - k^2 < 0$, atunci nu se vor produce oscilații, iar bara scoasă încet din poziția de echilibru (fără oscilații) se va întoarce în poziția ei de echilibru. Un asemenea fenomen se poate observa dacă se introduce bara într'un lichid vâscos și va fi apoi deviată din poziția de echilibru.

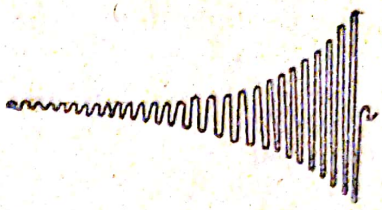


Fig. 13

Ne întoarcem la analizarea primului caz.

Cu sporirea rezistenții mediului, adică a valorii k, perioada oscilațiilor se va mări iar amplitudinile se vor micșora.

Să determinăm raportul a două amplitudini cu același semn pentru două valori consecutive t_{n+1} și t_n, la care

$$\sin\left(\sqrt{\varphi^2 - k^2}\, t\right) = 1$$

Diferența celor două valori ale timpului este egală cu perioada oscilațiilor:

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n = T$$

Prin urmare, pentru raportul căutat vom obține următoarea expresie:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{Ce^{-kt_n}}{Ce^{-kt_{n+1}}} = e^{k(t_{n+1}-t_n)} = e^{kT}$$

Luând logaritmul acestei expresii, obținem

$$\ln \frac{y_n}{y_{n+1}} = kT = \frac{\beta}{2m} T = \gamma. \qquad (31)$$

Acest raport reprezintă o valoare constantă și se numește *decrementul logaritmic al amortizării*. El are o importanță destul de mare, întrucât cu ajutorul lui, cunoscând valorile lui y_n, y_{n+1} și T, stabilite prin încercări, se poate determina coeficientul de amortizare k, care nu poate să fie calculat pe cale teoretică.

Valoarea coeficientului de amortizare $k = \frac{\beta}{2m}$ depinde de un număr considerabil de factori, precum: tipul construcției, rezistența materialului, frecarea în îmbinările elementelor construcției, în articulațiile reazimelor, etc. Din formula (31) obținem următoarea valoare a coeficientului k:

$$k = \frac{1}{T} \ln \frac{y_n}{y_{n+1}}$$

Analizând rezultatele experiențelor efectuate în URSS, prof. S. A. Iliasevici[1] a elaborat o formulă empirică pentru determinarea amortizărilor la podurile metalice. Această formulă are următorul aspect:

---

[1] S. A. Iliasevici, „Vibrațiile podurilor metalice". Editura Academiei de Geniu Militar a Armatei Roșii, 1940.

$$k = \frac{5}{T}\left(\frac{1{,}1}{T^2} - 1\right) 10^{-3}\ \text{sec}^{-1}$$

şi dă o bună concordanţă a valorii lui k cu rezultatele stabilite pe cale experimentală asupra podurilor metalice, atât de şosea cât şi de cale ferată.

Pentru podurile metalice valoarea lui k variază în limitele dela 0,6 pentru deschideri mai mici (50 m), până la 0,02 pentru deschideri mari (150 m).

Pentru construcţii din alte materiale, nu s'au dedus până în prezent asemenea formule.

Din ecuaţiile (28) şi (29) rezultă că determinarea frecvenţei oscilaţiilor libere, ţinând seama de amortizare, se face cu ajutorul expresiei

$$\varphi_c = \sqrt{\varphi^2 - k^2}$$

Pentru majoritatea construcţiilor, datorită valorii mici a lui k, în raport cu valoarea lui φ, se poate admite că

$$\varphi_c = \varphi$$

Prin urmare, *la determinarea frecvenţei, deci şi a perioadei oscilaţiilor, se poate neglija rezistenţa mediului.*

§ 3. Oscilaţii forţate într'un mediu fără rezistenţă

In fond, oscilaţiile forţate ale unor construcţii reale, ca şi oscilaţiile libere, se produc întotdeauna într'un mediu cu rezistenţă. Insă, pentru o mai bună studiere a fenomenului este indicat să le examinăm la început în ipoteza că forţele rezistente lipsesc.

Să examinăm un caz general când masa, care acţionează asupra sistemului, se găseşte sub acţiunea forţei $Pf(t)$, care variază în funcţiune de timp. Astfel de forţe pot să fie de exemplu, şocuri repetate periodic, mişcarea de rotaţie a maselor neechilibrate, etc. In aceste condiţii, la forţele de inerţie menţionate mai sus, la rezistenţa elastică a grinzii se va adăuga o *forţă oscilatorie* $Pf(t)$.

Admiţând că mişcarea grinzii coincide cu direcţia forţei oscilatorii $Pf(t)$ se poate scrie o ecuaţie de echilibru, analoagă cu ecuaţia (3)

$$S - I - Pf(t) = 0$$

Făcând substituirea valorilor lui S şi I, obţinem

$$m\ddot{y} + \alpha y - Pf(t) = 0$$

sau

$$\ddot{y} + \varphi^2 y = \frac{P}{m} f(t) \qquad (32)$$

în care φ este frecvenţa oscilaţiilor libere ale masei.

Ecuaţia diferenţială (32) este o ecuaţie neomogenă. Integrala generală a acestei ecuaţii se compune din integrala generală a ecuaţiei omogene corespunzătoare, care are două constante de integrare şi dintr'o integrală particulară, fără constante de integrare.

Scanned with OKEN Scanner

Prin substituire directă ne putem convinge uşor că integrala ecuaţiei (32) se determină prin expresia

$$y = A_1 \sin \varphi t + A_2 \cos \varphi t + \\ + \frac{P}{\varphi m}\left[\sin \varphi t \int_0^t f(t) \cos \varphi t \, dt - \cos \varphi t \int_0^t f(t) \sin \varphi t \, dt\right]. \quad (33)$$

Primii doi termeni din membrul al doilea al ecuaţiei (33) corespund ecuaţiei (5) şi reprezintă oscilaţiile libere ale sistemului. Constantele A_1 şi A_2 se determină din condiţiile iniţiale. Al treilea termen reprezintă integrala particulară a ecuaţiei (32). Totalitatea termenilor reprezintă oscilaţiile totale ale sistemului elastic sub influenţa forţei oscilatorii $Pf)t)$.

Să presupunem că un sistem cu o singură masă concentrată este supus la acţiunea unei forţe oscilatorii periodice.

$$Pf(t) = P \sin \vartheta t$$

în care ϑ este frecvenţa forţei oscilatorii.

Substituind valoarea lui $f(t)$ în integralele ecuaţiei (33) şi efectuând integrarea, obţinem

$$\sin \varphi t \int_0^t \sin \vartheta t \cos \varphi t \, dt - \cos \varphi t \int_0^t \sin \vartheta t \sin \varphi t \, dt = \\ = \frac{1}{2} \sin \vartheta t \left[\frac{1}{\vartheta + \varphi} - \frac{1}{\vartheta - \varphi}\right] = \frac{-\varphi}{\vartheta^2 - \varphi^2} \sin \vartheta t.$$

După substituirea acestei expresii în ecuaţia (33) obţinem

$$y = A_1 \sin \varphi t + A_2 \cos \varphi t - \frac{P}{m(\vartheta^2 - \varphi^2)} \sin \vartheta t = \\ = A_1 \sin \varphi t + A_2 \cos \varphi t + y_{din} \sin \vartheta t. \quad (34)$$

Ultimul termen al acestei ecuaţii, după cum s'a arătat mai sus, caracterizează oscilaţille forţate. Din această expresie rezultă că aceste oscilaţii se produc cu aceeaşi frecvenţă ca şi oscilaţiile forţei oscilatorii. Valoarea

$$y_{din} = \frac{P}{m\varphi^2\left(1 - \frac{\vartheta^2}{\varphi^2}\right)} \quad (35)$$

reprezintă amplitudinea oscilaţiilor forţate, fără a ţine seamă de amortizare.

Inlocuind pe φ în formula (35) cu expresia lui (13)

$$\varphi^2 = \frac{\alpha}{m},$$

obţinem

$$y_{din} = \frac{P}{\alpha\left(1 - \frac{\vartheta^2}{\varphi^2}\right)} = P\,\delta_{st} \frac{1}{1 - \frac{\vartheta^2}{\varphi^2}} = y_{st} \cdot \mu \quad (36)$$

Produsul $P\delta_a$ reprezintă deplasarea pe care ar fi avut-o sistemul sub acțiunea forței statice P.

Valoarea

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\vartheta^2}{\varphi^2}} \tag{37}$$

este *coeficientul dinamic*. In sistemele cu un singur grad de libertate, valoarea coeficientului dinamic determină raportul valorilor deformațiilor și a eforturilor dinamice față de valorile lor statice. provocate de amplitudinea forțelor dinamice.

Din expresia (35) rezultă că valoarea amplitudinii y_{din} ale oscilațiilor forțate depinde, atât de valoarea forței P, cât și de raportul frecvențelor $\vartheta : \varphi$ ale oscilațiilor forțate și celor libere.

Pentru a lămuri influența acestor raporturi vom examina un caz particular.

Să presupunem că există un sistem cu frecvența oscilațiilor libere de $\varphi = 58{,}9 \frac{1}{\text{sec}}$ și asupra acestui sistem acționează o forță periodică produsă de un motor.

Vom varia turația n a motorului în limitele dela 120 până la 720 și vom determina coeficienții dinamici corespunzători lui μ (37).

Frecvența forței oscilatorii se calculează cu ajutorul formulei

$$\vartheta = \frac{n}{60} 2\pi = 0{,}105\, n \frac{1}{\text{sec}}$$

Calculele sunt concentrate în tabloul 1.

Tabloul 1

Turația	Frecvența ϑ	ϑ/φ	$1-\vartheta^2/\varphi^2$	μ
120	12,6	0,215	0,953	1,05
240	25,2	0,428	0,917	1,22
360	37,8	0,642	0,588	1,70
480	50,4	0,856	0,267	3,74
540	56,7	0.944	0,109	9,2
560	58,5	0,993	0,014	71,0
600	63,0	1,070	—0,145	—7,0
660	69,3	1.176	—0,382	—2,61
720	75,6	1,284	—0,650	—1,54

Fig. 14 înfățișează o curbă, care reprezintă variația valorilor μ în funcție de raportul $\vartheta : \varphi$. Acest caracter al funcției coeficientului dinamic μ față de raportul $\vartheta : \varphi$ se păstrează pentru toate sistemele cu un singur grad de libertate.

Scanned with OKEN Scanner

Caracteristica acestei diagrame este creşterea bruscă a coeficientului dinamic atunci când valoarea ϑ a oscilaţiilor forţate se apropie de valoarea φ a oscilaţiilor libere.

Când oscilaţiile sunt egale ($\vartheta = \varphi$) *valoarea coeficientului dinamic tinde spre infinit.* Acest caz este cunoscut în tehnică sub denumirea de *rezonanţă* şi constitue un pericol real pentru construcţii, întrucât deformaţiile şi solicitările la rezonanţă cresc indefinit.

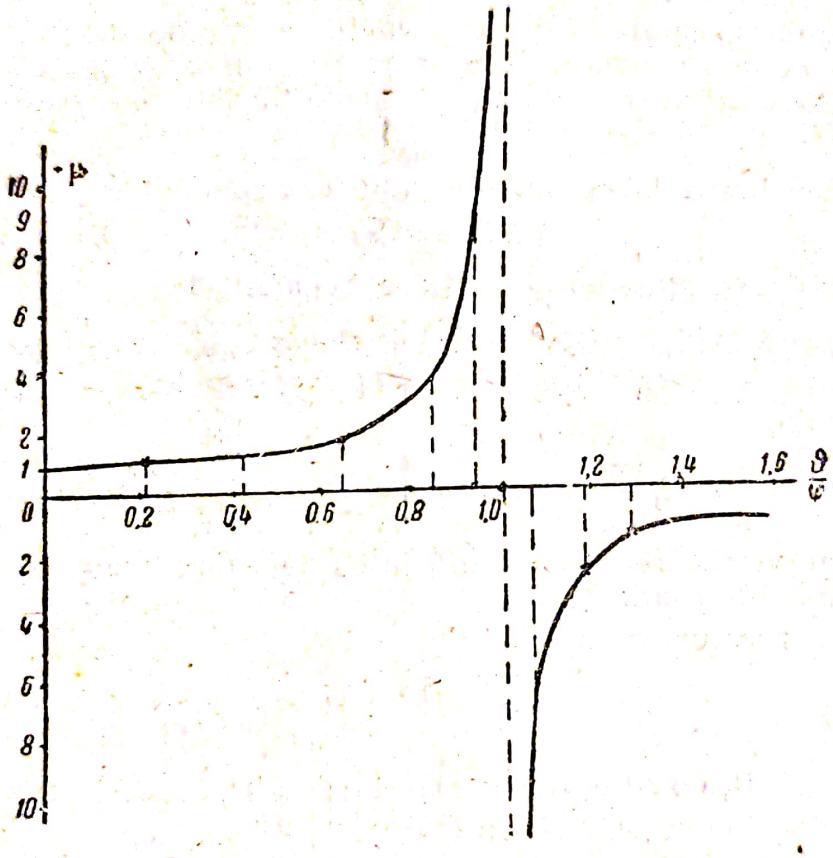


Fig. 14

In cele expuse mai sus nu s'a ţinut seamă de rezistenţa mediului, frecarea reazimelor, frecarea interioară a materialului, etc. din care cauză s'a ajuns la concluzia asupra sporirii infinit de mari a amplitudinii, în cazul când valoarea raportului $\frac{\vartheta}{\varphi}$ se apropie de unitate. Influenţa rezistenţelor asupra procesului de creştere a amplitudinii este analizată în paragraful următor.

§ 4. Oscilaţii forţate amortizate

Vom examina acum un caz mai real al oscilaţiilor forţate şi anume cazul oscilaţiilor amortizate. Ca şi mai înainte, admitem că forţele rezistente sunt proporţionale cu vitesa, adică $R = -\beta y$ [a se vedea expresia (22)]. Atunci ecuaţia diferenţială de echilibru (23) se va scrie astfel:

$$my + \beta y' + \alpha y = Pf(t).$$

După introducerea notațiilor (11) și (4)

$$\varphi^2 = \frac{\alpha}{m} \quad \text{și} \quad 2k = \frac{\beta}{m}$$

această ecuație se transformă în:

$$\ddot{y} + 2k\dot{y} + \varphi^2 y = \frac{P}{m} f(t) \tag{38}$$

Integrala generală a acestei ecuații se obține dacă la integrala generală a aceleeași ecuații, fără membrul din dreapta, adăugăm integrala particulară care exprimă influența membrului din dreapta al ecuației (38).

Ne vom limita la examinarea unui caz particular când

$$Pf(t) = P \sin \vartheta t$$

In acest caz, integrala generală a ecuației (38) se va scrie astfel;

$$y = e^{-kt}\left[B_1 \sin\left(\sqrt{\varphi^2 - k^2}\, t\right) + B_2 \cos\left(\sqrt{\varphi^2 - k^2}\, t\right)\right] + \\ + C_1 \left[2\vartheta k \cos \vartheta t - (\varphi^2 - \vartheta^2) \sin \vartheta t\right] \tag{39}$$

în care

$$C_1 = -\frac{P}{m\left[(\varphi^2 - \vartheta^2)^2 + 4\,\vartheta^2 k^2\right]} \tag{40}$$

Pentru verificarea exactității integralei (39) luăm derivatele și le substituim în ecuația (38).

Pentru prescurtare, notăm

$$\sqrt{\varphi^2 - k^2} = \omega$$

Atunci

$$\dot{y} = -ke^{-kt}\left[B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t\right] + e^{-kt}\omega\left[B_1 \cos \omega t - B_2 \sin \omega t\right] - \\ - C_1 \vartheta \left[2\vartheta k \sin \vartheta t + (\varphi^2 - \vartheta^2) \cos \vartheta t\right]$$

$$\ddot{y} = k^2 e^{-kt}\left[B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t\right] - ke^{-kt}\omega\left[B_1 \cos \omega t - B_2 \sin \omega t\right] - \\ - ke^{-kt}\omega\left[B_1 \cos \omega t - B_2 \sin \omega t\right] - e^{-kt}(\varphi^2 - k^2)\left[B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t\right] - \\ - C_1 \vartheta^2 \left[2\vartheta k \cos \vartheta t - (\varphi^2 - \vartheta^2) \sin \vartheta t\right].$$

Adăugând și scăzând în ultima expresie doi termeni de felul:

$$\varphi^2 C_1 \left[2\vartheta k \cos \vartheta t - (\varphi^2 - \vartheta^2) \sin \vartheta t\right]$$

și

$$2k\vartheta C_1 \left[2k\vartheta \sin \vartheta t + (\varphi^2 - \vartheta^2) \cos \vartheta t\right]$$

și făcând însumarea termenilor asemenea, obținem

$$\ddot{y} = -\varphi^2\left\{e^{-kt}\left[B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t\right] + C_1\left[2\vartheta k \cos \vartheta t - (\varphi^2 - \vartheta^2) \sin \vartheta t\right]\right\} - \\ - 2k\left\{-ke^{-kt}\left[B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t\right] + e^{-kt}\omega\left[B_1 \cos \omega t - B_2 \sin \omega t\right] - \right. \\ \left. - C_1 \vartheta \left[2k\vartheta \sin \vartheta t + (\varphi^2 - \vartheta^2) \cos \vartheta t\right]\right\} + C_1\left\{\cos \vartheta t\left[2\vartheta k \varphi^2 - \right.\right. \\ \left. - 2k\vartheta(\varphi^2 - \vartheta^2) - 2k\vartheta^3\right] - \sin \vartheta t\left[(\varphi^2 - \vartheta^2)\varphi^2 + 4k^2\vartheta^2 - \right. \\ \left.\left. - (\varphi^2 - \vartheta^2)\vartheta^2\right]\right\}$$

Prin confruntarea primei paranteze a acestei expresii cu ecuaţia (39), a parantezei a doua cu expresia y şi după simplificarea ultimei paranteze obţinem

$$\ddot{y} = -\varphi^2 y - 2k\dot{y} - C_1 [(\varphi^2 - \vartheta^2)^2 + 4k^2\vartheta^2] \sin \vartheta t,$$

După substituirea lui C_1 (40), obţinem

$$\ddot{y} + 2k\dot{y} + \varphi^2 y = \frac{P}{m} \sin \vartheta t,$$

ceea ce corespunde ecuaţiei (38).

Primii doi termeni ai ecuaţiei (39) caracterizează oscilaţiile libere când există amortizare (a se vedea expresia 26); constantele B_1 şi B_2 se determină din condiţiile iniţiale.

Termenul al treilea al ecuaţiei (39)

$$y_p = C_1 [2 \vartheta k \cos \vartheta t - (\varphi^2 - \vartheta^2) \sin \vartheta t] \tag{41}$$

caracterizează oscilaţiile forţate când există amortizare. Această expresie poate să fie prezentată sub următoarea formă:

$$y_p = \frac{P}{m\sqrt{(\varphi^2 - \vartheta^2)^2 + 4\vartheta^2 k^2}} \left[\frac{-2\vartheta k \cos \vartheta t}{\sqrt{(\varphi^2 - \vartheta^2)^2 + 4\vartheta^2 k^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\varphi^2 - \vartheta^2) \sin \vartheta t}{\sqrt{(\varphi^2 - \vartheta^2)^2 + 4\vartheta^2 k^2)}} \right];$$

şi apoi poate să fie transcrisă astfel[1)]

$$\left.\begin{aligned} y_p &= y_{din} [\sin \varepsilon \cos \vartheta t + \cos \varepsilon \sin \vartheta t] = y_{din} \sin (\vartheta t + \varepsilon) \\ \text{în care} \\ \varepsilon &= \operatorname{arctg} \frac{-2\vartheta k}{\varphi^2 - \vartheta^2}; \qquad y_{din} = \frac{P}{m\sqrt{(\varphi^2 + \vartheta^2)^2 + 4\vartheta^2 k^2}} \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Aceasta demonstrează că oscilaţiile forţate — când există amortizare — se produc cu un decalaj de fază în raport cu forţa oscilatorie.

Dacă se ţine seama că

$$\varphi^2 = \frac{\alpha}{m}$$

şi că

$$2k = \frac{\beta}{m} = \frac{2\gamma}{T} = \frac{\gamma \cdot \varphi}{\pi}$$

[1)] Din trigonometrie se ştie că:

dacă $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{-m}{n}$, atunci $\sin \varepsilon = \frac{\pm m}{\sqrt{n^2 + m^2}}$ şi $\cos \varepsilon = \frac{\mp n}{\sqrt{n^2 + m^2}}$.

Scanned with OKEN Scanner

și substituim aceste valori în ecuația (42), care determină valoarea amplitudinii oscilațiilor forțate y_{din}, obținem

$$y_{din} = \frac{P}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\vartheta^2}{\varphi^2}\right)^2 + \frac{\vartheta^2}{\varphi^2} \cdot \frac{4\,k^2}{\varphi^2}}} = y_{st}\,\mu \tag{43}$$

în care $y_{st} = \frac{P}{\alpha}$ este săgeata produsă de încărcarea statică și

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\vartheta^2}{\varphi^2}\right)^2 + \frac{\vartheta^2}{\varphi^2} \cdot \frac{\beta^2}{m^2\,\varphi^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\vartheta^2}{\varphi^2}\right)^2 + \frac{\vartheta^2}{\varphi^2} \cdot \frac{\gamma^2}{\pi^2}}} \tag{44}$$

este coeficientul dinamic. Valoarea acestui coeficient depinde de rapor-turile

$$\frac{\vartheta^2}{\varphi^2} \quad \text{și} \quad \frac{\gamma^2}{\pi^2} = \frac{\beta^2}{\varphi^2\,m^2}$$

Comparația coeficienților dinamici ai oscilațiilor forțate cu amor-tizare (37) și fără amortizare (44), arată că primul coeficient diferă de cel de al doilea prin prezența termenului al doilea sub radicalul dela numitor, care crește cu sporirea raportului $\frac{\beta}{\varphi}$. De aci rezultă de-a-drep-tul că la creșterea rezistenței, amplitudinile se micșorează.

Fig. 15 înfățișează curbele care reprezintă coeficientul dinamic în funcție de raportul $\frac{\vartheta}{\varphi}$ și valoarea γ.

Valoarea maximă a coeficientului dinamic pentru o valoare dată a lui γ poate să fie determinată prin stabilirea minimului expresiei

$$\frac{1}{\mu^2} = \left(1 - \frac{\vartheta^2}{\varphi^2}\right)^2 + \frac{\vartheta^2}{\varphi^2} \frac{\gamma^2}{\pi^2}$$

care are loc pentru

$$\frac{\vartheta^2}{\varphi^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{2\,\pi^2} = 1 - 0{,}05\,\gamma^2$$

Introducând această relație în ecuația (44), obținem valoarea maximă a coeficientului dinamic

$$\mu_{max} = \frac{1}{\frac{\gamma}{2\,\pi}\sqrt{4 - \frac{\gamma^2}{\pi^2}}}$$

Cu toate că din această expresie rezultă că pentru $\gamma < 2\,\pi$ coe-ficientul dinamic nu are o valoare infinită, totuși amplitudinea osci-lațiilor poate să atingă valori atât de mari, încât existența construcției să fie periclitată.

Scanned with OKEN Scanner

§ 5. Pulsaţii

Mai înainte am examinat cazul când asupra unei construcţii acţionează o singură forţă oscilatorie ; pot exista însă cazuri când asupra unui sistem acţionează mai multe forţe oscilatorii. De exemplu această situaţie se poate ivi atunci când asupra unei construcţii acţionează mai multe maşini. Pentru ca să examinăm oscilaţiile unui sistem cu un singur grad de libertate supus la acţiunea mai multor forţe oscilatorii, vom studia un caz simplu când acţionează numai două forţe care variază după următoarele legi :

$$P_1(t) = P_1 \sin \varphi_1 t$$

şi

$$P_2(t) = P_2 \sin \varphi_2 t$$

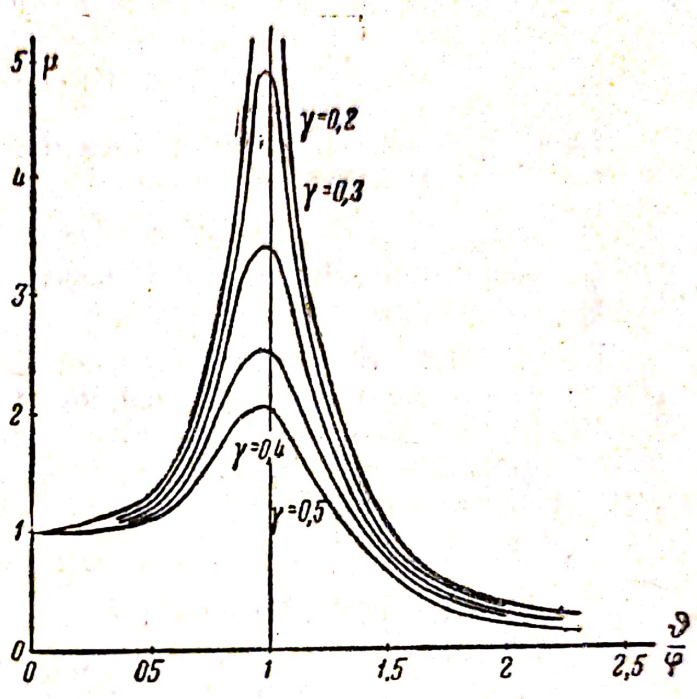


Fig. 15

Prin însumarea oscilaţiilor provocate de ambele forţe, se formează o oscilaţie complexă. In acest caz săgeţile diferitelor puncte se vor determina cu ajutorul ecuaţiei[1)]

$$y(xt) = y_1(x) \sin \varphi_1 t + y_2(x) \sin \varphi_2(t) \qquad (45)$$

Intrucât legea mişcării nu variază în funcţie de mărimea amplitudinilor deformaţiilor $y_1(x)$ şi $y_2(x)$, este nimerit să cercetăm caracterul mişcării, presupunând că amplitudinile deformaţiilor sunt egale :

$$y_1(x) = y_2(x) = y_a$$

Astfel putem scrie ecuaţia deformaţiilor (45) în felul următor :

$$y(xt) = y_a (\sin \varphi_1 t + \sin \varphi_2 t)$$

Făcând transformarea trigonometrică, obţinem

$$y(xt) = 2 y_a \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} t \cdot \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} t, \qquad (46)$$

Această ecuaţie (46) poate să fie considerată ca o ecuaţie a oscilaţiilor

$$y(xt) = A \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} t .$$

[1)] In cazul de faţă oscilaţiile proprii ale sistemului se neglijează.

cu amplitudine variabilă

$$A = 2y_a \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} t$$

și cu o frecvență egală cu frecvența medie

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Când $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ amplitudinea deformației devine constantă, iar deformațiile variază după sinusoida

$$y(xt) = 2\, y_o \sin\, \varphi t$$

însă cu amplitudinea dublă față de cazul când acționează numai o singură forță oscilatorie.

Pentru stabilirea formei diagramelor pentru diferite frecvențe φ_1 și φ_2, să cercetăm cazul cel mai interesant și anume când φ_1 și φ_2 au o diferență relativ mică între ele.

Să presupunem că $\varphi_1 = 13\ \text{sec}^{-1}$ și $\varphi_2 = 11\ \text{sec}^{-1}$; în acest caz ecuația (46) se va scrie astfel:

$$y(xt) = 2\, y_a \cos\, t \cdot \sin\, 12\, t$$

Dând lui t o serie de valori:

$$t = \frac{4\pi}{\varphi_1 + \varphi_2} \frac{n}{4} = \frac{\pi}{24} n$$

în care n este o serie de numere rotunde consecutive începând cu 0, determinăm valorile respective ale sinusurilor și cosinusurilor, după care calculăm și valorile deformațiilor y_x.

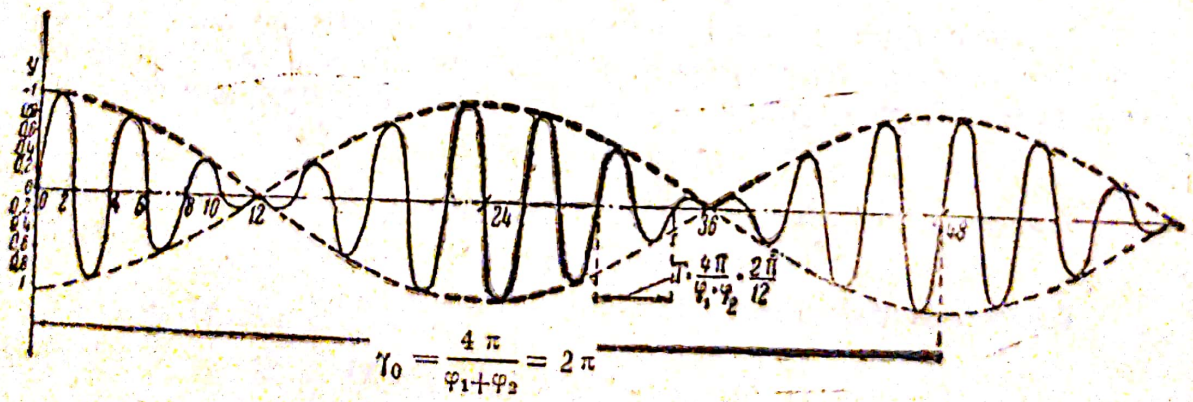


Fig. 16

In fig. 16 este reprezentată o diagramă a variației ordonatelor deformațiilor, calculate după datele de mai sus. Din această diagramă rezultă că oscilațiile se produc după o curbă similară cu o sinusoidă, însă cu amplitudinea variabilă care crește și descrește periodic.

Acest fenomen de creștere și descreștere periodică a amplitudinii

Scanned with OKEN Scanner

se numeşte pulsaţie. Perioada de pulsaţie sau de variaţie a amplitudinii se determină prin timpul

$$T_0 = \frac{4\pi}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

care este cu atât mai mare, cu cât diferenţa între frecvenţele φ_1 şi φ_2 este mai mică.

Am examinat aci un caz de însumare a două oscilaţii forţate, fără să introducem oscilaţiile proprii de care, după stabilizarea oscilaţiilor forţate, putem să nu ţinem seamă, întrucât, datorită rezistenţei mediului, ele dispar. La începutul acţiunii forţei oscilatorii se pot însă produce atât oscilaţii forţate cât şi oscilaţii proprii; în acest caz chiar şi la acţiunea unei singure forţe oscilatorii poate avea loc fenomenul de pulsaţie, cu toate că durata lui, din cauza amortizării oscilaţiilor proprii, va fi destul de scurtă.

Pentru explicarea acestui fenomen, vom analiza ecuaţia oscilaţiilor (34) la acţiunea forţei oscilatorii (fără amortizare) în ipoteza că la început sistemul se găseşte în stare de repaos, adică pentru $t_0 = 0$ vom avea $y_0 = 0$ şi $v_0 = 0$.

Conform ecuaţiei (34)

$$y = A_1 \sin \varphi t + A_2 \cos \varphi t + y_{din} \sin \vartheta t;$$

$$\dot{y} = \varphi A_1 \cos \varphi t - \varphi A_2 \sin \varphi t + y_{din}\, \vartheta \cos \vartheta t$$

Din condiţiile de mai sus obţinem valorile constantelor care intră în aceste ecuaţii:

$$A_2 = 0$$

$$A_1 = \frac{\vartheta}{\varphi} y_{din}$$

Atunci ecuaţiile deformaţiilor se transformă astfel:

$$y = y_{din}\left(-\frac{\vartheta}{\varphi} \sin \varphi t + \sin \vartheta t\right) =$$

$$= \frac{P \cdot y_a}{1 - \frac{\vartheta^2}{\varphi^2}}\left(\sin \vartheta t - \frac{\vartheta}{\varphi} \sin \varphi t\right) \qquad (47)$$

Pentru calculul diagramei oscilaţiilor totale vom examina un caz particular când $\vartheta = 0{,}8\,\varphi$. La acest raport al frecvenţelor, ecuaţia (47) se transformă astfel:

$$y = \frac{P \cdot y_a}{0{,}36}(\sin 0.8\,\varphi t - 0{,}8 \sin \varphi t)$$

Este evident că pentru ca să apară pulsaţia este necesar ca, în afară de deformaţiile în momentul iniţial şi deformaţiile corespunzătoare la alte valori ale lui t să fie egale cu zero, ceea ce înseamnă că

Scanned with OKEN Scanner

ambii termeni din paranteze să fie egali cu zero. Această din urmă condiţie este îndeplinită numai în cazul când

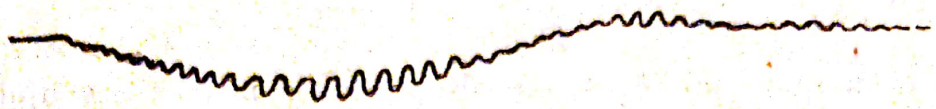


Fig. 17.

$$0{,}8\,\varphi t = 2n_1\,\pi \quad \text{şi} \quad \varphi t = 2n_2\,\pi \tag{48}$$

In această expresie n_1 şi n_2 sunt numere rotunde arbitrare. Pentru ca condiţia de mai sus să fie îndeplinită trebue să existe între valori următoarea relaţie

$$2{,}5n_1 = 2n_2$$

care este satisfăcută pentru următorul raport:

$$\frac{n_1}{n_2} = 0{,}8 = \frac{4}{5}$$

şi apoi pentru

$$\frac{8}{10},\ \frac{16}{20},\ \frac{24}{30},\ \text{etc.}$$

Substituind în ecuaţia (48) valorile corespunzătoare ale lui n_1 şi n_2, ajungem la concluzia că, în cazul de faţă, oscilaţiile vor fi periodice, cu perioada:

$$T = \frac{10\,\pi}{\varphi}$$

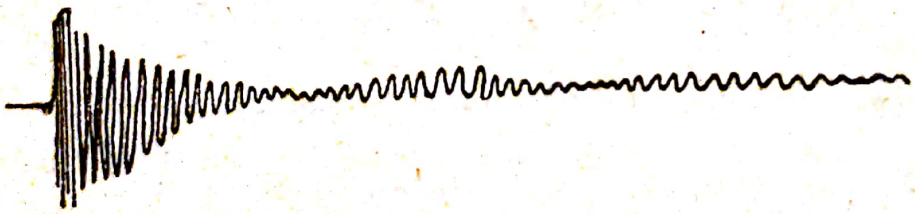


Fig. 18

In acest caz diagrama oscilaţiilor este similară cu diagrama înfăţişată în fig. 16.

Nu este lipsit de interes să remarcăm că fenomenul pulsaţiei se produce uneori la vibrarea tablierelor de poduri, după cum s'a dovedit prin cercetări. Fig. 17 înfăţişează grafograma vibraţiilor unui tablier, înregistrată cu ajutorul vibrografului Geiger.

Formarea pulsaţiei la vibrarea unui tablier poate avea loc când există o mică diferenţă între perioada vibraţiilor proprii verticale ale grinzilor şi perioada vibraţiilor la balansarea tablierului, adică a vibraţiilor în jurul axei lui longitudinale. O astfel de vibraţie poate fi provocată prin acţiunea nesimetrică a convoiului de sarcini, de exemplu prin acţiunea nesimetrică a contragreutăţilor locomotivei etc.

Scanned with OKEN Scanner

In fig. 18 este reprezentată diagrama oscilațiilor verticale ale grinzii unui tablier cu pulsații bine exprimate, provocate de o lovitură nesimetrică în raport cu axa tablierului.[1)]

§ 6. Oscilații provocate de o sarcină aplicată brusc

1) Sarcina rămâne pe bară

Să presupunem că asupra unui sistem care se găsește în stare de repaos se aplică brusc o sarcină P, care rămâne apoi pe acest sistem.

Pentru ca să obținem ecuația oscilațiilor pentru acest caz, vom substitui valoarea $f(t) = 1$ în ecuația (33).

Astfel obținem:

$$y = A_1 \sin \varphi t + A_2 \cos \varphi t + \frac{P}{m\varphi}\left[\sin \varphi t \int_0^t 1 \cdot \cos \varphi t\, dt - \cos \varphi t \int_0^t 1 \cdot \sin \varphi t \cdot dt\right]$$

După efectuarea integrărilor din această ecuație, vom obține;

$$y = A_1 \sin \varphi t + A_2 \cos \varphi t + \frac{P}{m\varphi^2}(1 - \cos \varphi t) \qquad (49)$$

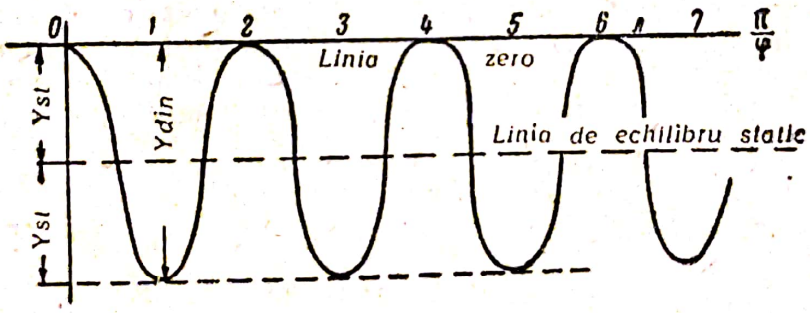


Fig. 19

Prima derivată a acestei ecuații va fi

$$\dot{y} = \varphi A_1 \cos \varphi t - \varphi A_2 \sin \varphi t + \frac{P}{m\varphi} \sin \varphi t$$

Întrucât pentru $t = 0$; $y_0 = 0$ și $y = v_0 = 0$

vom avea

$$A_1 = 0 \quad \text{și} \quad A_2 = 0$$

Substituind valorile lui A_1 și A_2 în ecuația (49) și ținând seama că

$$\frac{P}{m\varphi^2} = y_{st}$$

obținem

$$y_{din} = y_{st}(1 - \cos \varphi t) \qquad (50)$$

[1)] S. A. Iliasevici „Bazele calculului dinamic al podurilor metalice". 1934, fig. 44 și 46.

Scanned with OKEN Scanner

In fig. 19 este reprezentată diagrama oscilațiilor punctului de aplicație al forței P. Din diagramă rezultă că oscilațiile se produc în jurul liniei deformației statice a sistemului și că deviația maximă, față de poziția inițială a sistemului în stare neîncărcată, este egală cu dublul săgeții statice:

$$y_{din} = 2y_{st}$$

In mod corespunzător, toate eforturile în elementele sistemului vor fi de două ori mai mari decât cele produse de acțiunea statică a forțelor.

Dacă încărcarea aplicată brusc se repetă, efectele ei se suprapun peste efectele încărcării precedente. Această încărcare capătă aspectul încărcării periodice și dacă perioadele ei coincid cu perioadele de oscilație ale sistemului, amplitudinea oscilațiilor sporește de două, de trei și de mai multe ori. O astfel de încărcare crează un fel de rezonanță și este periculoasă pentru construcții.

2) Sarcina rămâne un timp scurt pe bară

Ca și în cazul precedent, se presupune că sarcina cu greutatea ei totală se aplică brusc, însă rămâne pe construcție numai un timp limitat t_0.

In perioada $0 < t < t_0$, adică în perioada când sarcina se găsește pe sistem, acest caz nu diferă cu nimic de cazul examinat mai înainte cu durata lungă de acțiune a sarcinii, pentru care deformația la oscilații se determină cu ajutorul ecuației (50). Prin urmare, deformația este;

$$y_1 = y_{st}(1 - \cos \varphi t)$$

iar vitesa oscilațiilor

$$\dot{y}_1 = y_{st}\,\varphi \cdot \sin \varphi t$$

In perioada a doua, când $t > t_0$, iar sarcina P este ridicată de pe sistem, se produc numai oscilații libere, la care deformațiile variază după legea:

$$y_2 = A_1 \sin \varphi t + A_2 \cos \varphi t \qquad (51)$$

iar vitesa oscilațiilor

$$\dot{y}_2 = \varphi A_1 \cos \varphi t - \varphi A_2 \sin \varphi t$$

Constantele de integrare A_1 și A_2 se determină din următoarea condiție; pentru $t = t_0$, $y_2 = y_1$ și $\dot{y}_2 = \dot{y}_1$; datorit cărui fapt se pot scrie următoarele expresii

$$A_1 \sin \varphi t_0 + A_2 \cos \varphi t_0 = y_{st}(1 - \cos \varphi t_0) \qquad (52)$$

$$\varphi A_1 \cos \varphi t_0 - \varphi A_2 \sin \varphi t_0 = \varphi\, y_{st} \sin \varphi t_0$$

Inmulțind prima dintre aceste expresii cu $\sin \varphi t_0$, iar cea de a doua cu $\frac{1}{\varphi} \cos \varphi t_0$ și însumându-le, obținem:

$$A_1 = y_{st}(1 - \cos \varphi t_0) \sin \varphi t_0 + y_{st} \sin \varphi t_0 \cos \varphi t_0$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$A_1 = y_{st} \sin \varphi t_o$$

Inlocuind valoarea lui A_1 în ecuaţia a doua (52), obţinem

$$A_2 = -y_{st}(1 - \cos \varphi t_o)$$

Substituirea valorilor obţinute ale lui A_1 şi A_2, în ecuaţia deformaţiei (51) ne dă:

$$y_2 = y_{st} \sin \varphi t_o \sin \varphi t - y_{st}(1 - \cos \varphi t_o) \cos \varphi t$$

sau

$$y_2 = y_{st}[\cos \varphi(t - t_o) - \cos \varphi t] \qquad (53)$$

Această expresie după transformări se poate scrie astfel:

$$y_2 = 2y_{st} \sin \frac{\varphi t_o}{2} \sin \varphi \left(t - \frac{1}{2} t_o\right)$$

Valoarea maximă a lui y_2 va avea loc când

$$\left(t - \frac{1}{2} t_o\right) = \frac{\pi}{2\varphi}$$

şi va fi egală cu

$$y_{max} = 2 \sin \frac{\varphi t_o}{2} y_{st}$$

Prin urmare, expresia $2 \sin \varphi \frac{t_o}{2}$ este coeficientul dinamic. Acest coeficient dinamic arată că amplitudinea vibraţiilor depinde, în cazul de faţă, de durata acţiunii sarcinii asupra sistemului. Cu cât acţiunea sarcinii P va fi mai mică, cu atât şi deformaţia sistemului va fi mai redusă. Când $t_o = \frac{\pi}{\varphi}$ deformaţia dinamică va fi egală cu cea statică.

Probleme şi exerciţii.

9) Să se determine turaţiile n care pot fi admise pentru un motor având greutatea $P_1 = 3t$, aşezat la mijlocul unei grinzi simplu rezemate, cu condiţia ca valoarea coeficientului dinamic să nu depăşească 2. Componenta verticală a forţei centrifuge a motorului este $P_2 \sin \vartheta t = 1 \cdot \sin \vartheta t \cdot$ tone.

Grinda este de oţel profil I Nr. 24, având deschiderea $l = 4$ m şi momentul de inerţie $I_z = 4.200$ cm^4. Greutatea grinzii este de 41 kg/m şi poate fi neglijată faţă de greutatea motorului.

Indicaţie. Frecvenţa încărcării cu vibraţii (în 2π sec) se determină cu ajutorul formulei

$$\vartheta = \frac{2\pi}{60} n$$

Răspuns:

$$\varphi = 46 \text{ sec}^{-1}; \quad \vartheta = \varphi \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1}$$

$$n \leqslant 310 \text{ turaţii/min.}$$

10) Să se verifice dacă este posibilă instalarea pe grinda din problema precedentă, a unui motor cu turaţia $n = 860$, cu condiţia ca rezistenţa în grindă să nu depăşească $\sigma = 1.400$ kg/cm^2 şi săgeata să nu fie mai mare decât $\frac{1}{500} l$

Răspuns:

$$\mu = 2{,}45$$

$$\sigma = \sigma_{p_1} + \mu\,\sigma_{p_2} = 1.362 \text{ kg/cm}^2$$

$$y_{max} = y_{p_1} + \mu\, y_{p_2} = 0{,}75 \text{ cm}$$

11. Să se determine valoarea tasării dinamice a fundației din problema 7, în cazul acțiunii unei forțe oscilatorii $P(t) = 6 \sin \vartheta t$ tone la turația $n = 200$ turații/min. Forța este aplicată exact în axa fundației.

Răspuns:

$$\mu = 1{,}06\,; \qquad y_{st} = \frac{P}{kF}\,; \qquad y_{din} = 1{,}11 \text{ mm}$$

12. Să se traseze diagrama oscilațiilor unui sistem cu un singur grad de libertate și cu frecvența φ a oscilațiilor proprii, în cazul când asupra sistemului se aplică în mod consecutiv și brusc forțele P egale ca valoare și având aceeași direcție. Aceste forțe se aplică cu perioade egale cu perioada oscilațiilor proprii ale sistemului și rămân pe sistem.[1])

Indicație. Trebue să folosim explicațiile care însoțesc deducerea formulei. (50) Fiecare aplicare a forței P provoacă oscilații care se suprapun peste oscilațiile provocate de forțele aplicate mai înainte.

---

[1]) Problema este luată din lucrarea prof. N. I. Bezuhov „Dinamica construcțiilor în exemple și probleme", 1947, problema Nr. 27.

CAPITOLUL 2

OSCILAȚIILE PROPRII ALE UNUI SISTEM CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE

§ 7. Gradele de libertate ale sistemelor elastice

Până în paragraful precedent s'au examinat numai sistemele cu un singur grad de libertate, adică astfel de sisteme la care, pentru determinarea poziției unui punct oarecare, este suficient să cunoaștem o singură deplasare a centrului masei m. De exemplu, pentru determinarea într'un moment oarecare t a formei axei deformate a unei grinzi, la care neglijăm greutatea proprie și având o singură masă concentrată, este necesar să cunoaștem deplasarea masei $y(t)$ în acel moment. De exemplu, în cazul unei bare frânte reprezentată în fig. 20, masa m poate să se deplaseze atât pe verticală cât și pe orizontală. Pentru ca să stabilim forma axei deformate a acestei bare, este necesar să cunoaștem două deplasări independente una față de cealaltă: y_1 și y_2. Prin urmare sistemul dat are *două grade de libertate.*

Sistemele înfățișate în fig. 21, au de asemenea câte două grade de libertate. In aceste cazuri, două deplasări y_1 și y_2, permit să stabilim forma axei deformate. Astfel, pentru ca să stabilim numărul gradelor de libertate ale sistemului care suportă mase concentrate, *este necesar ca prin introducerea de legături suplimentare să aducem sistemul la o astfel de formă la care nici o deplasare a maselor nu este posibilă. Numărul minim al legăturilor necesare pentru fixarea tuturor maselor, va fi egal cu numărul gradelor de libertate.*

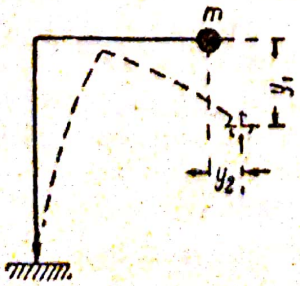


Fig. 20

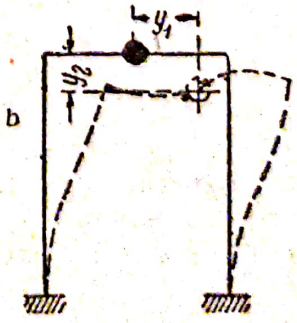


Fig. 21

Astfel, de exemplu, pentru cadrul reprezentat în fig. 22 a numărul minim al legăturilor arătate în fig. 22 b este egal cu patru. Masele m_1 și m_3 nu pot să se deplaseze pe verticală[1], prin urmare pentru fixarea lor s'a introdus câte o legătură. Masa m_2 poate să se deplaseze atât pe verticală cât și pe orizontală datorită deformațiilor riglei și a montanților, deci a mai fost nevoie de introducerea a două legături: *3* și *4*.

Bara cu contur poligonal cu patru mase la noduri, reprezentată în fig. 23 a, are trei grade de libertate, întrucât pentru înlăturarea tuturor deplasărilor posibile ale maselor se cere introducerea a trei legături, indicate în fig. 23 b.

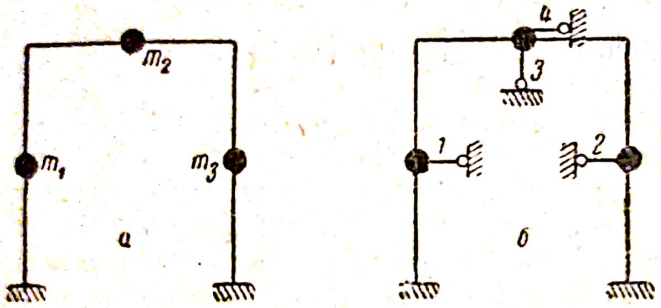


Fig. 22

În sistemele înfățișate în fig. 20, 21 b și 22 numărul gradelor de libertate este mai mare decât numărul maselor concentrate. Din contra, în sistemul reprezentat în fig. 23, numărul maselor este mai mare decât numărul gradelor de libertate. De aci rezultă că numărul gradelor de libertate nu se determină întotdeauna în raport cu numărul maselor concentrate.

Trebue să observăm că numărul gradelor de libertate nu depinde de faptul dacă sistemul dat este static determinat, sau static nedeterminat. Astfel, de exemplu, la cadrul reprezentat în fig. 22. introducerea de articulații în punctele de încastrare nu va schimba numărul legăturilor necesare pentru fixarea maselor m_1, m_2 și m_3 și prin urmare nu va modifica nici numărul gradelor de libertate.

Numărul gradelor de libertate depinde de asemenea și de gradul de precizie al calculelor, deci este oarecum convențional. Astfel, de exemplu *dacă vom ține seamă de inerția de rotație a maselor, atunci la legăturile liniare este necesar să mai adăugăm încastrările care să împiedece rotirea maselor*. In acest caz cadrul înfățișat în fig. 22 va avea 7 grade de libertate.

Dacă în loc de mase concentrate sistemul ar avea mase distribuite, de exemplu greutatea proprie, atunci el va avea un număr infinit de mare de grade de libertate. Calculul sistemelor cu un număr infinit de grade de libertate este mult mai complicat.

Pentru un sistem cu un singur grad de libertate se produce o singură frecvență a oscilațiilor proprii cu forma ei corespunzătoare. Pentru un sistem cu n grade de libertate sunt posibile n frecvențe diferite, la care corespund n forme deosebite de oscilații.

---

[1]) Se neglijează deformațiile axiale ale montanților.

Astfel, pentru sisteme cu un număr infinit de grade de libertate, se produc un număr considerabil de frecvenţe şi de forme de oscilaţii proprii. *Totalitatea frecvenţelor unui sistem elastic se numeşte spectrul*

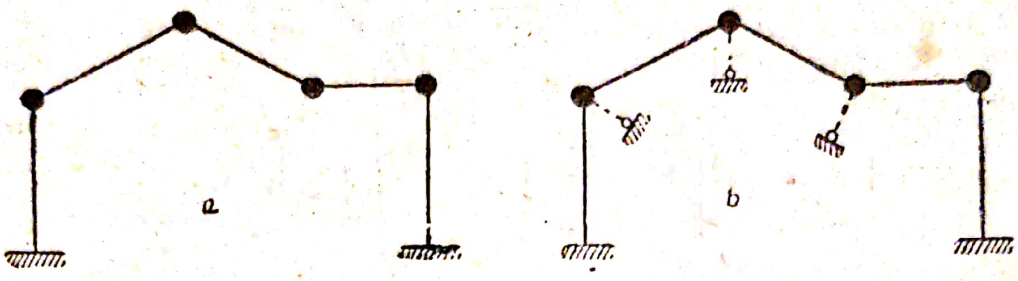


Fig. 23

frecvenţelor. In practică, în calcule se pune, de obiceiu, problema determinării unei singure frecvenţe minime, după cum şi în calculele de stabilitate inginerul trebue să cunoască numai o singură forţă minimă.[1)]

A. *METODELE EXACTE PENTRU CALCULUL FRECVENŢELOR*

§ 8. Ecuaţiile principale ale oscilaţiilor libere ale sistemelor

Să considerăm o grindă la care neglijăm greutatea proprie (fig. 24) şi care se găseşte sub acţiunea forţelor de inerţie a maselor concentrate m_1, m_2, ... m_n, aplicate în punctele *1*, *2* ..... n:

$$-m_1\ddot{y}_1, -m_2\ddot{y}_2, \ \ldots\ -m_n\ddot{y}_n$$

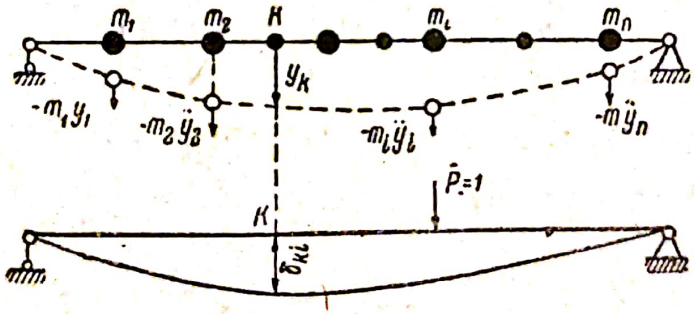


Fig. 24

Fie δ_{ki} deplasarea punctului k sub acţiunea forţei $\bar{P}=1$, aplicată în punctul i; atunci deplasarea punctului k provocată de inerţia masei m_i, care se găseşte în punctul i, se va scrie astfel:

$$y_{ki} = \delta_{ki}\left(-m_i\ddot{y}_i\right)$$

[1)] Cu excepţia calculelor fundaţiilor şi construcţiilor pentru maşini speciale, de exemplu, turbine cu turaţii foarte mari, etc.

Deplasarea totală a punctului k sub acțiunea forțelor de inerție a tuturor maselor concentrate este egală cu:

$$y_k = -\delta_{k1} m_1 \ddot{y}_1 - \delta_{k2} m_2 \ddot{y}_2 \ldots\ldots - \delta_{kk} m_k \ddot{y}_k \ldots\ldots - \delta_{kn} m_n \ddot{y}_n$$

Asemenea ecuații se pot alcătui în număr egal cu numărul gradelor de libertate pe care le are grinda. Ele vor forma următorul sistem de ecuații:

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 + m_1 \delta_{11} \ddot{y}_1 + m_2 \delta_{12} \ddot{y}_2 + \ldots\ldots + m_n \delta_{1n} \ddot{y}_n = 0;\\
&y_2 + m_1 \delta_{21} \ddot{y}_1 + m_2 \delta_{22} \ddot{y}_2 + \ldots\ldots + m_n \delta_{2n} \ddot{y}_n = 0:\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n + m_1 \delta_{n1} \ddot{y}_1 + m_2 \delta_{n2} \ddot{y}_2 + \ldots\ldots + m_n \delta_{nn} \ddot{y}_n = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

Acest sistem are n soluții particulare, care pot fi scrise astfel:

$$\begin{aligned}
y_1 &= A_1 \sin(\varphi t + \nu)\\
y_2 &= A_2 \sin(\varphi t + \nu)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= A_n \sin(\varphi t + \nu)
\end{aligned}$$

Substituind valorile lui y precum și derivatele de ordinul al doilea în raport cu timpul:

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_1 &= -\varphi^2 A_1 \sin(\varphi t + \nu);\\
\ddot{y}_2 &= -\varphi^2 A_2 \sin(\varphi t + \nu)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ddot{y}_n &= -\varphi^2 A_n \sin(\varphi t + \nu)
\end{aligned}$$

în ecuația (54), după reducere cu $\sin(\varphi t + \nu)$ obținem

$$\left.\begin{aligned}
&(m_1 \delta_{11} \varphi^2 - 1) A_1 + m_2 \delta_{12} \varphi^2 A_2 + \ldots + m_n \delta_{1n} \varphi^2 A_n = 0;\\
&m_1 \delta_{21} \varphi^2 A_1 + (m_2 \delta_{22} \varphi^2 - 1) A_2 + \ldots + m_n \delta_{2n} \varphi^2 A_n = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m_1 \delta_{n1} \varphi^2 A_1 + m_2 \delta_{n2} \varphi^2 A_2 + \ldots + (m_n \delta_{nn} \varphi^2 - 1) A_n = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Acest sistem de ecuații omogene în raport cu amplitudinile A_1, A_2 .... A_n, poate avea două soluții:

1) Toate amplitudinile sunt egale cu zero, astfel încât în acest caz nu se produc vibrații.

2) Amplitudinile sunt diferite de zero. Acest caz este posibil numai atunci când determinantul sistemului de ecuații (55) este nul. Această condiție constitue punctul de plecare pentru determinarea oscilațiilor construcției:

$$\begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\varphi^2-1) & m_2\delta_{12}\varphi^2 & \dots & m_n\delta_{1n}\varphi^2 \\ m_1\delta_{21}\varphi^2 & (m_2\delta_{22}\varphi^2-1) & \dots & m_n\delta_{2n}\varphi^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1}\varphi^2 & m_2\delta_{n2}\varphi^2 & \dots & (m_n\delta_{nn}\varphi^2-1) \end{vmatrix} = 0$$

Impărţind toţi termenii cu φ^2 şi notând $\lambda = \frac{1}{\varphi^2}$, obţinem

$$\begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}-\lambda) & m_2\delta_{12} & \dots & m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & (m_2\delta_{22}-\lambda) & \dots & m_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots & (m_n\delta_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \qquad (56)$$

Dacă rezolvăm determinantul (56), putem obţine o ecuaţie de gradul n în raport cu λ, prin soluţionarea căreia se pot găsi un număr de n rădăcini diferite ($\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$). La fiecare valoare corespunde o frecvenţă proprie ($\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$). In unele cazuri, în special la sistemele în cadre, două sau trei frecvenţe pot să fie numeric egale; atunci se spune că frecvenţa este multiplă.

Ecuaţia (56) a fost obţinută pentru prima oară în astronomie. Numerele caracteristice, care reprezintă pătratele perioadelor de mişcare ale planetelor, se măsoară prin numere foarte mari (secole). De aceea ecuaţia (56) a căpătat în literatura ştiinţifică denumirea de *ecuaţie seculară*.

In cazul când se obţine o ecuaţie seculară de gradul al doilea sau al treilea, rezolvarea ei nu prezintă nici o dificultate; însă atunci când este de grad superior (al patrulea sau mai mare), rezolvarea ei devine foarte dificilă. După cum s'a arătat mai sus, *pentru scopuri practice este de obiceiu nevoie să cunoaştem numai frecvenţa minimă şi prin urmare rădăcina cea mai mare* λ_{max}. Aceasta uşurează oarecum rezolvarea problemei.

Pentru determinarea rădăcinii maxime λ_{max}, deci şi pentru determinarea frecvenţei minime φ_{min}, există metode speciale. Cea mai simplă şi mai comodă este metoda prof. S. A. Bernştein, pe care o vom întrebuinţa la rezolvarea problemelor complicate. Lăsând la o parte demonstraţia acestei metode, ne vom mărgini la indicarea formulelor necesare, care permit determinarea frecvenţei minime.

Pe baza cercetării proprietăţilor spectrale ale determinantului deplasărilor, prof. S. A. Bernştein[1] a alcătuit o funcţiune specială aşa zisă spectrală, ai cărei coeficienţi permit să se obţină două astfel de numere, între care se găseşte rădăcina cea mai mare a ecuaţiei secunlare λ_{max}. Aceste două numere poartă denumirea de *aprecieri bilaterale* ale valorii căutate λ_{max}.

[1]) S. A. Bernştein „O nouă metodă pentru determinarea frecvenţelor la oscilaţiile sistemelor elastice" VIA RKKA, 1939.

Aprecierile prof. S. A. Bernștein se notează în felul următor:

$$\sqrt[k]{\frac{B_k}{2}\left[1+\sqrt{2\frac{B_{2k}}{B_k^2}-1}\right]} < \lambda_{max} < \sqrt[2k]{B_{2k}} \qquad (57)$$

în care pentru un sistem cu n grade de libertate

$$B_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \ldots \sum_{p=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} m_i\, m_k\, m_l \ldots m_p\, m_t\, \delta_{ik}\, \delta_{kl}\, \delta_{l} \ldots \delta_{ti}.$$

În cazul când $k = 1, 2, 4$ avem următoarele formule:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \sum_{i=1}^{n} m_i\, \delta_{ii}; \\ B_2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_i\, m_k\, \delta_{ik}\, \delta_{ki}; \\ B_4 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} m_i\, m_k\, m_l\, m_t\, \delta_{ik}\, \delta_{kl}\, \delta_{lt}\, \delta_{ti} \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Dacă sistemul elastic are trei grade de libertate, formulele (58), sub formă desfășurată, au următorul aspect:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22} + m_3\delta_{33}; \\ B_2 &= m_1^2\delta_{11}^2 + m_2^2\delta_{22}^2 + m_3^2\delta_{33}^2 + 2\left[m_1m_2\delta_{12}^2 + m_2m_3\delta_{23}^2 + m_3m_1\delta_{31}^2\right] \\ B_4 &= m_1^4\delta_{11}^4 + m_2^4\delta_{22}^4 + m_3^4\delta_{33}^4 + 4\left[m_1^3 m_2\delta_{11}^2\delta_{12}^2 + m_1^3 m_3\delta_{11}^2\delta_{13}^2 + \right. \\ &\quad + m_2^3 m_3\delta_{22}^2\delta_{23}^2 + m_2^3 m_1\delta_{22}^2\delta_{21}^2 + m_3^3 m_1\delta_{33}^2\cdot\delta_{31}^2 + m_3^3 m_2\delta_{33}^2\delta_{32}^2\left.\right] + \\ &\quad + 4\left[m_1^2 m_2^2\,\delta_{11}\delta_{22}\delta_{12}^2 + m_2^2 m_3^2\delta_{22}\delta_{33}\,\delta_{23}^2 + m_3^2 m_1^2\delta_{33}\delta_{11}\delta_{31}^2\right] + \\ &\quad + 2\left[m_1^2 m_2^2\delta_{12}^4 + m_2^2 m_3^2\delta_{23}^4 + m_3^2 m_1^2\delta_{31}^4\right] + 8\left[m_1^2 m_2 m_3\,\delta_{11}\,\delta_{12}\delta_{23}\delta_{31} + \right. \\ &\quad + m_2^2 m_3 m_1\,\delta_{22}\,\delta_{23}\delta_{31}\delta_{12} + m_3^2\cdot m_1\, m_2\,\delta_{33}\,\delta_{31}\,\delta_{12}\delta_{23}\left.\right] + \\ &\quad + 4\left[m_1^2 m_2 m_3\,\delta_{12}^2\delta_{13}^2 + m_2^2 m_3 m_1\,\delta_{23}^2\delta_{21}^2 + m_3^2 m_1 m_2\,\delta_{31}^2\delta_{32}^2\right] \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

In multe cazuri prima aproximație ($k = 2$) dă o precizie destul de mare. In acest scop este necesar să calculăm coeficienții B_1 și B_2 și numai în cazuri izolate trebue să recurgem la a doua aproximație, pentru aplicarea căreia trebue să se calculeze coeficienții suplimentari B_4.

Folosind coeficienții B, „aprecierile" pentru rădăcina cea mare λ_{max} se pot determina și cu ajutorul următoarelor inegalități mult mai simple[1]

$$\sqrt[k]{\frac{B_{2k}}{B_k}} < \lambda_{max} < \sqrt[2k]{B_{2k}} \qquad (60)$$

Insă inegalitățile (57) indicate mai sus, dau „aprecieri" mult mai apropiate. De aceea se recomandă să se efectueze rezolvarea în or-

[1] A se vedea A. F. Smirnov „Stabilitatea statică și dinamică a construcțiilor", 1947 § 11.

dinea următoare: calculăm pe B_1 și B_2 și aplicăm apoi formula (60). In cazul când diferența între cele două aprecieri este mare, atunci trebue să aplicăm formula (57).

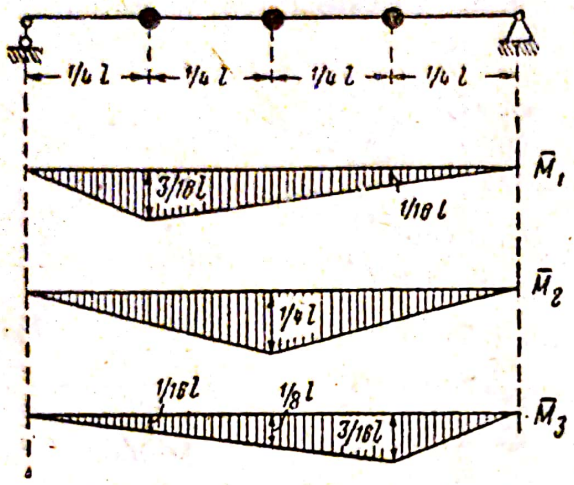


Fig. 25

Dacă și în acest caz exactitatea nu va fi suficientă, este necesar să calculăm coeficientul B_4 și să aplicăm din nou formula (60) și dacă va fi nevoie, formula (57).

Dăm un exemplu de determinare a numărului maxim caracteristic λ_{max} prin aplicarea aprecierilor (60) și (57).

Se cere să determinăm frecvența minimă pentru grinda cu trei mase concentrate înfățișată în fig. 25. Din diagramele unitare reprezentate în aceeași figură găsim:

$$\delta_{11} = \delta_{33} = \frac{9\,l^3}{768\,EI}; \qquad \delta_{22} = \frac{16\,l^3}{768\,EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{23} = \frac{11\,l^3}{768\,EI}; \qquad \delta_{13} = \frac{7\,l^3}{768\,EI}$$

Ecuația seculară se scrie sub forma următoare;

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{9\,ml^3}{768EI} - \lambda\right) & \frac{11\,ml^3}{768\,EI} & \frac{7\,ml^3}{768\,EI} \\ \frac{11\,ml^3}{768\,EI} & \left(\frac{16\,ml^3}{768\,EI} - \lambda\right) & \frac{11\,ml^3}{768\,EI} \\ \frac{7ml^3}{768\,EI} & \frac{11\,ml^3}{768\,EI} & \left(\frac{9\,ml^3}{768\,EI} - \lambda\right) \end{vmatrix} = 0$$

Din formula (59) găsim:

$$B_1 = \frac{9\,ml^3}{768\,EI} + \frac{16\,ml^3}{768\,EI} + \frac{9\,ml^3}{768\,EI} = \frac{34\,ml^3}{768\,EI};$$

$$B_2 = \frac{1.000}{768^2}\left(\frac{ml^3}{EI}\right)^2$$

„Aprecierea superioară" atât în formula (57) cât și în formula (60) este aceeași. O vom determina în primul rând:

$$\lambda_{max} < \sqrt{\frac{1.000}{768^2}\left(\frac{ml^3}{EI}\right)^2} = \frac{31{,}62}{768}\,\frac{ml^3}{EI}$$

Apoi găsim „aprecierea inferioară" cu ajutorul formulei (60)

$$\lambda_{max} > \frac{B_2}{B_1} = \frac{1.000}{34}\,\frac{1}{768}\,\frac{ml^3}{EI} = \frac{29,41}{768}\,\frac{ml^3}{EI}$$

Astfel, rădăcina cea mai mare se găsește între următoarele limite :

$$\frac{29,41}{768}\,\frac{ml^3}{EI} < \lambda_{max} < \frac{31,62}{768}\,\frac{ml^3}{EI}$$

Luând valoarea medie, obținem

$$\lambda_{max} = \frac{30,51}{768}\,\frac{ml^3}{EI}$$

Să întrebuințăm acum formula (57) :

$$\lambda_{max} > \frac{B_1}{2}\left[1 + \sqrt{\frac{2B_2}{B_1^2} - 1}\right] = \frac{ml^3}{EI}\,\frac{34}{2 \cdot 768}\left[1 + \sqrt{\frac{2.000}{1.156} - 1}\right] =$$

$$= \frac{31,52}{768}\,\frac{ml^3}{EI}$$

Astfel vom avea :

$$\frac{31,52}{768}\,\frac{ml^3}{EI} < \lambda_{max} < \frac{31,62}{768}\,\frac{ml^3}{EI}$$

Valoarea medie este :

$$\lambda_{max} = \frac{31,57}{768}\,\frac{ml^3}{EI}$$

Astfel, ca rezultat al calculelor, am obținut :

1) după formula aproximativă (60)

$$\lambda_{max} = \frac{30,51}{768}\,\frac{ml^3}{EI}$$

2) după formula precisă (57)

$$\lambda_{max} = \frac{31,57}{768}\,\frac{ml^3}{EI}$$

3) valoarea exactă pentru această problemă este :

$$\lambda_{max} = \frac{31,56}{768}\,\frac{ml^3}{EI}$$

Cu ajutorul valorilor lui λ găsim valorile corespunzătoare ale frecvențelor oscilațiilor.

1) valoarea aproximativă din formula (60)

$$\varphi = 5,52\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

Scanned with OKEN Scanner

2) valoarea mai precisă după formula (57)

$$\varphi = 5{,}62\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

3) valoarea exactă

$$\varphi = 5{,}62\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

Cifrele de mai sus arată că la calculul frecvențelor oscilațiilor minime cu ajutorul aprecierilor bilaterale, se obțin rezultate destul de bune atât la folosirea formulei (60) cât și a formulei (57).

Remarcăm că avantajul folosirii acestei metode se afirmă numai în cazurile când determinantul este de gradul al treilea sau mai mare. Este evident că, pentru sisteme cu două grade de libertate rezolvarea directă a determinantului este mult mai simplă decât operația descrisă mai sus.

Exemplul 1. *Să se determine frecvența pentru grinda cu două mase, reprezentată în fig. 26.*

In cazul de față avem o grindă static nedeterminată cu două grade de libertate. Deplasările unitare trebue să fie stabilite ca într'un sistem static nedeterminat (grindă continuă). Ținând seamă de faptul că momentul pe reazim provocat de forța unitară, aplicată la mijlocul deschiderii, este

$$M = \frac{3}{32}ml,$$

găsim deplasările unitare

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{23\,l^3}{1536\,EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{3\,l^3}{512\,EI}$$

Ecuația seculară pentru cazul de față se va scrie sub următoarea formă:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{23m_1 l^3}{1536\,EI} - \lambda\right) & -\frac{3}{512}\frac{m_2 l^3}{EI} \\ -\frac{3m_1 l^3}{512\,EI} & \left(\frac{23}{1536}\frac{m_2 l^3}{EI} - \lambda\right) \end{vmatrix} = 0$$

Rezolvând determinantul găsim:

$$\left(\frac{23m_1 l^3}{1536\,EI} - \lambda\right)\left(\frac{23m_2 l^3}{1536\,EI} - \lambda\right) - \frac{9m_1 m_2 l^6}{512^2\,(EI)^2} = 0$$

de unde obținem următoarea ecuație în raport cu λ:

$$\lambda^2 - \frac{23l^3(m_1 + m_2)}{1536\,EI}\lambda + \frac{448}{1536^2}\frac{m_1 m_2 l^6}{(EI)^2} = 0$$

Rezolvând această ecuație în raport cu λ, găsim:

$$\lambda_{1,2} = \frac{23\,l^3(m_1 + m_2)}{2 \cdot 1536} \pm \sqrt{\frac{529\,(m_1 + m_2)^2 l^6}{4 \cdot 1536^2\,(EI)^2} - \frac{448\,m_1 m_2 l^6}{1536^2\,(EI)^2}}$$

Când masele sunt egale $m_1 = m_2$, vom avea :

$$\lambda_1 = \frac{32\, ml^3}{1536\, EI} = \frac{ml^3}{48EI}$$

$$\lambda_2 = \frac{14\, ml^3}{1536\, EI} = \frac{7\, ml^3}{768\, EI}$$

In raport cu valorile caracteristice obținute, determinăm frecvențele oscilațiilor grinzii : (a se compara cu problema 2)

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}$$

$$\varphi_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{109{,}72\, EI}{ml^3}}$$

La fiecare dintre frecvențele obținute corespunde o formă proprie a oscilațiilor. La prima frecvență corespunde o încovoiere după două semi-unde cu punctul de inflexiune în dreptul reazimului dela mijloc. La a doua frecvență corespunde axa încovoiată simetric față de reazimul dela mijloc (fig. 26).

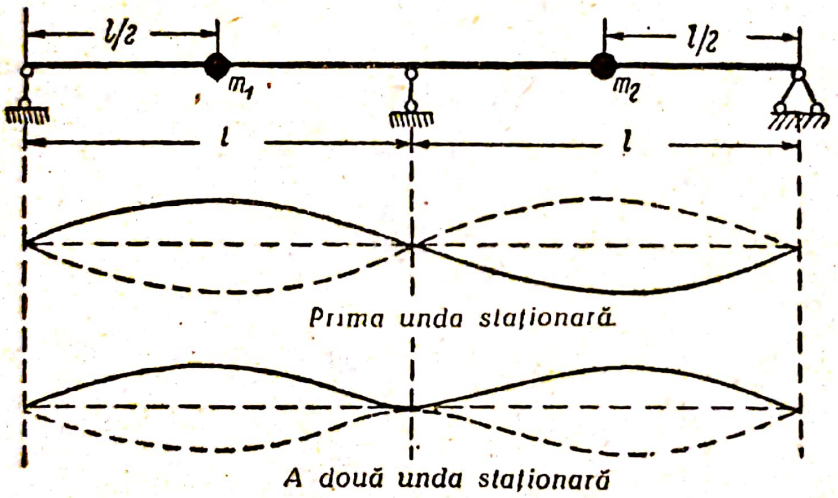


Fig. 26

Oscilațiile punctelor de aplicație ale maselor m_1 și m_2 se exprimă prin ecuațiile ;

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin(\varphi_1 t + \nu_1) + B_1 \sin(\varphi_2 t + \nu_2) \\ y_2 &= A_2 \sin(\varphi_1 t + \nu_1) + B_2 \sin(\varphi_2 t + \nu_2) \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Constantele A_2 și B_2 pot fi exprimate prin constantele A_1 și B_1, astfel :

$$A_2 = A_1 \rho_1 ; \qquad B_2 = B_1 \rho_2$$

Coeficienții ρ_1 și ρ_2 se determină din sistemul de ecuații (55) corespunzător cu $\varphi = \varphi_1$ și $\varphi = \varphi_2$.

In exemplul de față, acest sistem pentru $\varphi = \varphi_1$ are următorul aspect :

$$(m_1 \delta_{11} \varphi_1^2 - 1) A_1 + m_2 \delta_{12} \varphi_1^2 A_2 = 0$$

$$m_1 \delta_{21} \varphi_1^2 A_1 + (m_2 \delta_{22} \varphi_1^2 - 1) A_2 = 0$$

de unde

$$A_2 = - A_1 \frac{m_1 \delta_{11} \varphi_1^2 - 1}{m_2 \delta_{12} \varphi^2} = - A_1 \frac{m_1 \delta_{21} \varphi_1^2}{m_2 \delta_{22} \varphi_1^2 - 1} = A_1 \rho_1$$

Scanned with OKEN Scanner

Când $\varphi = \varphi_2$, în acest sistem va intra φ_2 în loc de φ_1, iar în loc de A_1 și A_2 vor intra B_1 și B_2.

$$B_2 = -B_1 \frac{m_1 \delta_{11} \varphi_2^2 - 1}{m_2 \delta_{12} \varphi_2^2} = -B_1 \frac{m_1 \delta_{21} \varphi_2^2}{m_2 \delta_{22} \varphi_2^2 - 1} = B_1 \rho_2.$$

După substituirea în ecuația oscilațiilor (a) a valorilor obținute pentru A_2 și B_2, exprimate în funcție de A_1 și B_1 vom avea patru valori necunoscute constante: A_1, B_1, ν_1 și ν_2 care pot fi determinate din condițiile inițiale ($t = 0$)

$$y_{10} = A_1 \sin \nu_1 + B_1 \sin \nu_2$$
$$y_{20} = A_1 \rho_1 \sin \nu_1 + B_1 \rho_2 \sin \nu_2$$
$$v_{10} = A_1 \varphi_1 \cos \nu_1 + B_1 \varphi_2 \cos \nu_2$$
$$v_{20} = A_1 \rho_1 \varphi_1 \cos \nu_1 + B_1 \rho_2 \varphi_2 \cos \nu_2$$

în care y_{10} și y_{20} sunt deviațiile maselor m_1 și m_2 în momentul inițial față de poziția lor echilibru.

v_{10} și v_{20} — vitezele inițiale ale maselor m_1 și m_2.

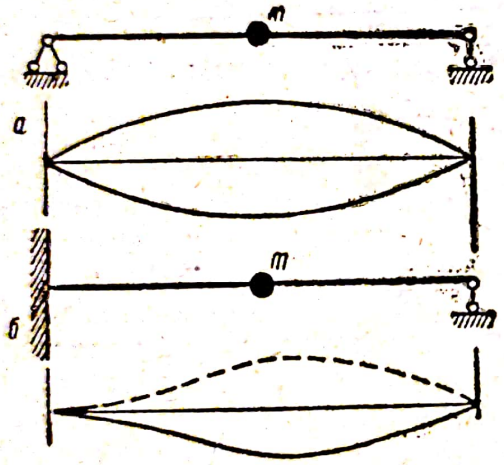


Fig. 27

Liniile care reprezintă formele axei deformate (fig. 26) se numesc *unde staționare*; la aceste *unde staționare punctele nodurilor, care se găsesc pe linia de echilibru, rămân fixe în timpul oscilațiilor* (fig. 26 și 27).

Examinând fig. 26 se poate observa că prima frecvență poate fi obținută din analizarea unei grinzi simplu rezemate cu o masă la mijlocul deschiderii (fig. 27 a), întrucât pe reazimul dela mijloc (punctul de inflexiune) momentul este egal cu zero. A doua frecvență poate fi găsită, considerând o grindă încastrată la un capăt și articulată la celălalt (fig. 27 b) întrucât forma undei staționare arată că secțiunea în dreptul reazimului dela mijloc nu se rotește.

§ 9. Folosirea simetriei

Pentru sistemele simetrice cu masele distribuite simetric, calculul frecvențelor se poate simplifica folosind condiția ca deplasările suplimentare să fie egale cu zero. Considerând că într'un sistem simetric pot să se producă forme simetrice și antisimetrice de oscilații, trebue ca la determinarea deplasărilor să facem regruparea necunoscutelor, după cum am procedat la calculul cadrelor supuse la acțiunea sarcinilor statice.

Fig. 28 a reprezintă un caz de acțiune simetrică a forțelor de inerție ale ambelor mase, iar în fig. 28 b acțiunea antisimetrică.

Admițând drept deplasări necunoscute deplasările grupate, corespunzătoare cu acțiunile cuplurilor unitare de forțe, indicate în aceleași figuri, se poate stabili ușor că fiecare masă corespunzătoare cuplului ne-

cunoscut, trebue să fie introdusă în ecuaţia seculară cu coeficientul $\frac{1}{2}$. Intr'adevăr să examinăm, de exemplu, acţiunea simetrică a maselor după cum se arată în fig. 28 a. Considerând deformaţia generalizată

$$y = y_1 + y_1 = 2y_1$$

găsim

$$2y_1 = \delta_{11}\,(-m\ddot{y}_1)$$

Admiţând, ca şi mai înainte, că $y_1 = A \sin(\varphi t + \nu)$, şi corespunzător $\ddot{y}_1 = -\varphi^2 A_1 \sin(\varphi t + \nu)$, după substituire obţinem

$$2y_1 = \delta_{11}\, m\, \varphi^2\, y_1$$

sau

$$\left(\frac{m}{2}\delta_{11}\,\varphi^2 - 1\right) = 0$$

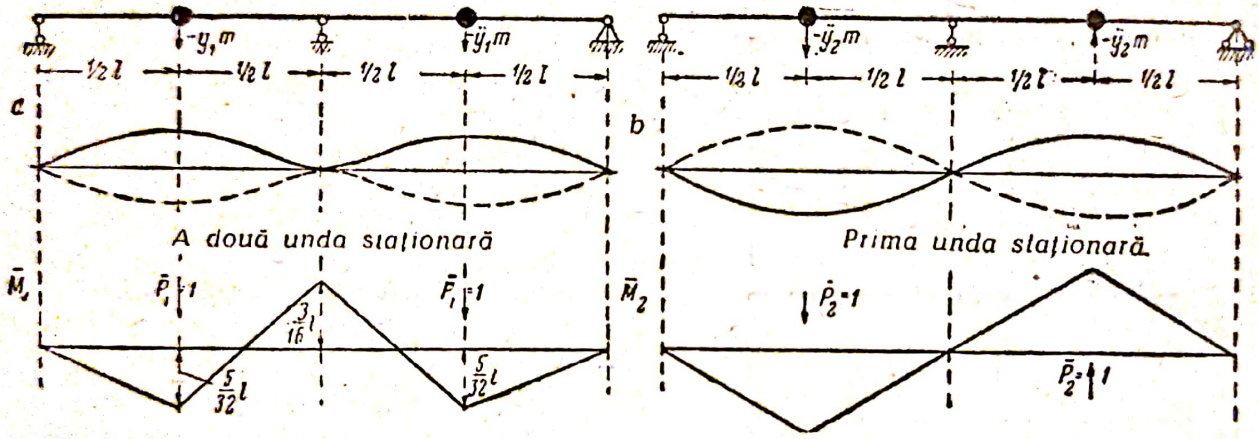


Fig. 28

In aceiaşi ordine de idei pentru cazul unui număr oarecare de grade de libertate, vom ajunge la concluzia că în fiecare coloană a ecuaţiei seculare la care corespund cuplurile forţelor de inerţie, masa trebue să fie introdusă cu coeficientul $\frac{1}{2}$.

Exemplul 2. *Să se determine frecvenţa grinzii* (fig. 28) *pentru care s'a obţinut rezolvarea în exemplul precedent.*

Din diagramele unitare, reprezentate în fig. 28, găsim:

1) pentru grupul simetric

$$\delta_{11} = \frac{14}{768}\,\frac{l^3}{EI};$$

Din ecuaţia seculară pentru acest caz

$$\left|\delta_{11}\,\frac{m}{2} - \lambda\right| = 0$$

rezultă

$$\lambda = \frac{7}{768}\cdot\frac{ml^3}{EI}$$

de unde

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} = \sqrt{\frac{768}{7}\,\frac{EI}{ml^3}} = \sqrt{109{,}7\,\frac{EI}{ml^3}}$$

2) pentru grupul antisimetric:

$$\delta_{22} = \frac{1}{24}\,\frac{l^3}{EI}$$

prin urmare

$$\lambda = \delta_{22}\,\frac{m}{2} = \frac{1}{48}\,\frac{ml^3}{EI}$$

și

$$\varphi = \sqrt{48\,\frac{EI}{ml^3}}$$

Din punct de vedere al exactității, aceste rezultate sunt egale cu cele obținute în paragraful precedent.

§ 10. Oscilațiile proprii ale unui sistem cu un număr infinit de grade de libertate

Dacă la determinarea frecvențelor oscilațiilor se ține seama de greutatea proprie a construcției, atunci numărul gradelor de libertate devine infinit de mare, întrucât sistemul cu mase distribuite poate să fie considerat ca un sistem cu un număr infinit de mase concentrate

$$dm = \frac{q\,dx}{g}$$

în care q este greutatea grinzii pe unitatea de lungime, g — accelerația gravității.

Ca sistem cu un număr infinit de mare de grade de libertate, vom considera o grindă cu axa dreaptă și vom presupune că greutatea ei proprie variază după o anumită lege $q(x)$. Dacă vom considera oscilațiile proprii ale acestei grinzi, atunci singură forța exterioară care acționează asupra unui element dx al grinzii va fi forța de inerție egală cu

$$-\,m\,(x)\,dx\,\ddot{y}$$

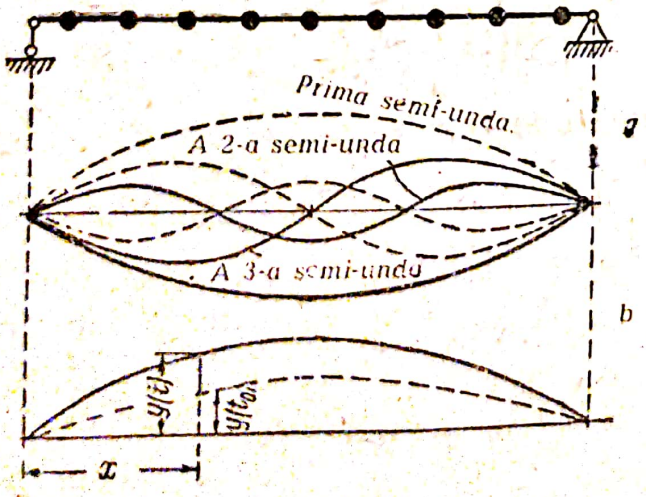


Fig. 29

în care

$$m(x) = \frac{q\,(x)}{g}$$

După cum se cunoaște din cursul de Mecanica construcțiilor, intensitatea încărcării se determină prin expresia:

$$\frac{d^2}{d^2x}\left(EI_x\,\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

In cazul de față, ecuația diferențială a vibrațiilor când momentul de inerție al grinzii este constant, poate să fie exprimată sub forma următoare:

$$EI\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\,m\,(x)\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (61)$$

Această ecuație este exprimată sub formă de derivate, întrucât ordonatele axei deformate prin vibrații sunt în funcție de abscisă și de timp :

$$y = y(x,t)$$

La fiecare frecvență proprie corespunde o undă staționară proprie (fig. 29 a). Aceasta înseamnă că forma axei deformate prin vibrațiile corespunzătoare fiecărei frecvențe, nu depinde de timp. Ținând seama de această particularitate, raportul între deformațiile într'un punct oarecare (fig. 29), măsurate în două momente diferite, se poate scrie astfel:

$$\frac{y(x,t)}{y(x,t_0)} = f(t)$$

sau

$$y(x,t) = y(x,t_0)\, f(t)$$

De asemenea se poate scrie

$$y(x,t) = F(x)\, f(t)$$

Admițând, ca și mai înainte, că

$$f(t) = \sin(\varphi t + \nu);$$

obținem

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = F^{IV}(x) \cdot \sin(\varphi t + \nu);$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -F(x) \cdot \varphi^2 \sin(\varphi t + \nu)$$

Inlocuind aceste valori în ecuația (61) și admițând că intensitatea masei grinzii este constantă, obținem :

$$F^{IV}(x) - k^4 F(x) = 0 \qquad (62)$$

în care

$$k^4 = \frac{m\varphi^2}{EI} \quad \text{sau} \quad \varphi^2 = \frac{k^4 EI}{m} \qquad (63)$$

Integrala generală a ecuației diferențiale (62) are următoarea valoare :

$$F(x) = A \operatorname{ch} kx + B \operatorname{sh} kx + C \cos kx + D \sin kx \qquad (64)$$

ceea ce se dovedește prin substituire.

Pentru a ușura calculele se recomandă ca ecuația (64) să fie prezentată sub altă formă. În acest scop, introducem următoarele constante noi :

$$A = \frac{1}{2}(C_1 + C_3); \qquad C = \frac{1}{2}(C_1 - C_3);$$

$$B = \frac{1}{2}(C_2 + C_4); \qquad D = \frac{1}{2}(C_2 - C_4)$$

Substituirea lor în ecuația (64) ne dă :

$$F(x) = y_x = C_1 A_{kx} + C_2 B_{kx} + C_3 C_{\overline{kx}} + C_4 D_{kx}$$

Scanned with OKEN Scanner

In această expresie sunt introduse următoarele notații ;

$$\left.\begin{aligned} A_{kx} &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} kx + \cos kx)\,; & C_{kx} &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} kx - \cos kx)\,; \\ B_{kx} &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} kx + \sin kx)\,; & D_{kx} &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} kx - \sin kx) \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

Intre aceste valori există următoarea relație diferențială[1)]

$$A'_{kx} = k\,D_{kx}\,;$$
$$B'_{kx} = k\,A_{kx}\,;$$
$$C'_{kx} = k\,B_{kx}\,;$$
$$D'_{kx} = k\,C_{kx}\,;$$

Să scriem expresia deformațiilor y_x, a înclinărilor tangentelor față de axa deformată, a momentelor încovoietoare M_x, precum și a forțelor tăietoare Q_x

$$\left.\begin{aligned} y_x &= C_1 A_{kx} + C_2 B_{kx} + C_3 C_{kx} + C_4 D_{kx} \\ y'_x &= k\,(C_1 D_{kx} + C_2 A_{kx} + C_3 B_{kx} + C_4 C_{kx}) \\ y''_x &= \frac{M_x}{EI} = k^2\,(C_1 C_{kx} + C_2 D_{kx} + C_3 A_{kx} + C_4 B_{kx}) \\ y'''_x &= \frac{Q_x}{EI} = k^3\,(C_1 B_{kx} + C_2 C_{kx} + C_3 D_{kx} + C_4 A_{kx}) \end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Constantele de integrare C_1, C_2, C_3 și C_4, care intră în aceste ecuații, se determină din condițiile inițiale pentru $x = 0$

$$y(x) = y_0\,; \qquad y'(x) = y'_0\,;$$
$$y''(x) = \frac{M_0}{EI} \qquad \text{și} \qquad y'''(x) = \frac{Q_0}{EI}$$

Intrucât pentru $x = 0$; $A_{kx} = 1$, $B_{kx} = C_{kx} = D_{kx} = 0$, rezultă conform ecuației (66) :

$$C_1 = y_0$$
$$C_2 = \frac{1}{k}\,y_0$$
$$C_3 = \frac{1}{k^2}\,\frac{M_0}{EI}$$
$$C_4 = \frac{1}{k^3}\,\frac{Q_0}{EI}$$

---

1) Pentru calculul valorilor A_{kx}, B_{kx}, C_{kx}, D_{kx} sunt întocmite tabele (a se vedea anexa tabloul 3).

Substituind valorile constantelor în ecuaţia (66) obţinem :

$$\left.\begin{aligned} EIy_x &= EIy_0\, A_{kx} + EIy'_0 \frac{1}{k} B_{kx} + M_0 \frac{1}{k^2} C_{kx} + Q_0 \frac{1}{k^3} D_{kx} \\ EIy'_x &= EIy_0\, kD_{kx} + EIy'_0\, A_{kx} + M_0 \frac{1}{k} B_{kx} + Q_0 \frac{1}{k^2} C_{kx} \\ M_x &= EIy_0\, k^2\, C_{kx} + EIy'_0\, kD_{kx} + M_0\, A_{kx} + Q_0 \frac{1}{k} B_{kx} \\ Q_x &= EIy_0\, k^3\, B_{kx} + EIy'_0\, k^2 C_{kx} + M_0\, kD_{kx} + Q_0\, A_{kx} \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Folosind aceste ecuaţii se poate alcătui pe baza condiţiilor dela capetele grinzii o ecuaţie din care se determină parametrul k.

Modul de formare a acestor ecuaţii este indicat în exemplele care urmează.

Parametrul k se determină, de obiceiu, printr'o ecuaţie transcendentă, care trebue să fie rezolvată prin încercări. Unul dintre procedeele posibile de rezolvare prin încercări, este analizat în exemplul de mai jos.

După determinarea valorilor lui k cu ajutorul formulei (63) se determină frecvenţele oscilaţiilor proprii.

Exemplul 3. — *Să se determine frecvenţa oscilaţiilor proprii ale unei grinzi încastrate la un capăt şi simplu rezemate la celălalt ; greutatea pe unitatea de lungime a grinzii fiind q kg/m.*

Din condiţiile dela capetele grinzii rezultă că pentru

$x = 0$; $y_0 = 0$ şi $y'_0 = 0$

iar pentru $x = l$; $M_l = 0$ şi $Q_l = 0$

Pe baza acestor condiţii iniţiale alcătuim două ecuaţii (67) :

$$M_0 A_{kl} + \frac{1}{k} Q_0 B_{kl} = 0 ;$$

$$k M_0 D_{kl} + Q_0 A_{kl} = 0.$$

Valori diferite de zero pentru M_0 şi Q_0 pot avea loc cu condiţia ca :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{kl} & \frac{1}{k} B_{kl} \\ kD_{kl} & A_{kl} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = A_{kl}^2 - B_{kl}\, D_{kl} = 0$$

Substituind în ecuaţia obţinută funcţiunile hiperbolice A_{kl}, B_{kl}, D_{kl} (65) obţinem :

$$\Delta = (\mathrm{ch}\, kl + \cos kl)^2 - (\mathrm{sh}^2\, kl - \sin^2 kl) = 0$$

Deschizând parantezele şi făcând transformările, avem

$$\Delta = 2\,(\mathrm{ch}\, kl \cdot \cos kl + 1) = 0$$

Prin urmare, parametrul kl se determină din condiţia

$$\Delta_1 = \mathrm{ch}\, kl \cdot \cos kl + 1 = 0 \qquad (a)$$

Determinarea valorii lui k se face prin încercări, folosind tabele de funcţiuni circulare şi hiperbolice.

Alegem o serie de valori kl, începând cu 0 la intervale dela $0{,}2\,\pi$ până la $1{,}6\,\pi$ și calculăm pentru ele valorile ch kl și cos kl. Operația de calculare este arătată în tabloul 2. In același tablou sunt calculate valorile produselor ch kl cos kl precum și valorile Δ_1, după formula (a)

Tabloul 2

kl		ch kl	cos kl	ch kl cos kl	Δ_1
0	0	1	1	1	2
$0{,}2\pi$	0,628	1,205	0,809	0,975	1,97
$0{,}4\pi$	1,257	1,90	0,309	0,587	1,59
$0{,}6\pi$	1,885	3,363	—0,309	—1,040	—0,04
$0{,}8\pi$	2,514	6,220	—0,809	—5,39	—4,39
π	3,142	11,57	—1	—11,57	—10,57
$1{,}2\pi$	3,770	21,70	—0,809	—17,56	—16,56
$1{,}4\pi$	4,399	40,90	—0,309	—12,63	—11,63
$1{,}6\pi$	5,027	76,47	+0,309	+23,67	+24,67

In fig. 30 este reprezentată curba variației valorilor lui Δ_1.

Din rezultatele obținute în tabloul 2, se constată că prima valoare $\Delta_1 = 0$ coincide aproape cu valoarea $kl = 1{,}885$ (mai exact $kl = 1{,}875$).

A doua valoare $\Delta_1 = 0$ se găsește undeva între valorile $kl = 4{,}399$ și $kl = 5{,}027$ (aproximativ la $kl = 4{,}7$). Să precizăm această valoare luând două valori ale lui kl:

$kl = 1\,48\ \pi = 4{,}65$; ch $kl = 53\,89$; cos $kl = -0{,}035$

$kl = 1{,}50\ \pi = 4{,}71$; ch $kl = 55{,}90$; cos $kl = 0$

pentru $kl = 1{,}48\ \pi$ $\Delta_1 = 53{,}89\ (-0{,}035) + 1 = -0{,}87$

pentru $kl = 1{,}5\ \pi$, $\Delta_1 = 1$

Este evident că pentru $kl = 1{,}43\ \pi = 4{,}68$, avem $\Delta_1 = 0$.

Astfel, am obținut două valori ale lui kl, care determină prima și a doua frecvență ale oscilațiilor libere

$$\varphi_1 = \frac{1{,}875^2}{l}\sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{3{,}515}{l}\sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\varphi_2 = \frac{4{,}68^2}{l}\sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{22}{l}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Exemplul 4. *Să se determine frecvențele oscilațiilor proprii ale unei grinzi încastrate la ambele capete (fig. 31); greutatea grinzii pe 1 ml este egală cu q.*

Din condițiile inițiale (la capătul din stânga al grinzii) rezultă că

pentru $x = 0$; $y_0 = 0$; $y'_0 = 0$

$M_0 \neq 0$ și $Q_0 \neq 0$

Din condițiile dela capătul din dreapta al grinzii, rezultă că

pentru $x = l$; $y_l = 0$ și $y'_l = 0$

Formăm cele două ecuații (67)

$$EIy_l = \frac{1}{k^2} M_0 C_{kl} + \frac{1}{k^3} Q_0 D_{kl} = 0;$$

$$EIy_l = \frac{1}{k} M_0 B_{kl} + \frac{1}{k^2} Q_0 C_{kl} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Valorile lui M_o și Q_o pot fi nule atunci când următoarea condiție este îndeplinită

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{k^2} C_{kl} & \frac{1}{k^3} D_{kl} \\ \frac{1}{k} B_{kl} & \frac{1}{k^2} C_{kl} \end{vmatrix} = 0$$

de unde

$$C_{kl}^2 - B_{kl} D_{kl} = 0$$

Substituind în ecuația obținută valorile C_{kl}, B_{kl} și D_{kl} din expresia (65), avem

$$(\text{ch } kl - \text{ccs } kl)^2 - (\text{sh}^2 kl - \sin^2 kl) = 0$$

Desfăcând parantezele, obținem

$$2 (1 - \text{ch } kl \cos kl) = 0$$

Prin urmare, parametrul k se determină din condiția

$$\text{ch } kl \cdot \cos kl = 1$$

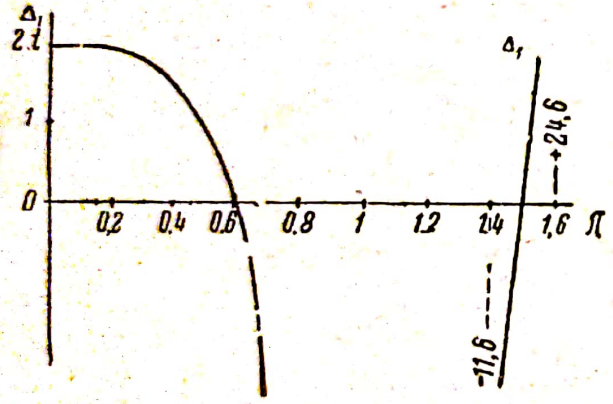


Fig. 30

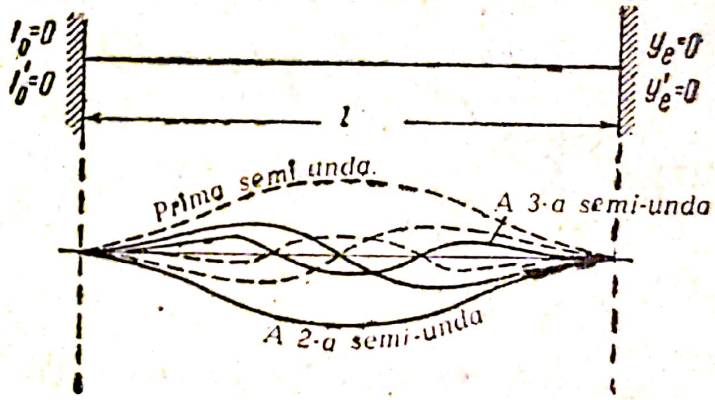


Fig. 31

Această ecuație se rezolvă prin încercări, folosind în acest scop tabelele de funcțiuni circulare și hiperbolice.

Primele trei valori ale lui k sunt:

$$k_1 = \frac{4{,}730}{l}, \quad k_2 = \frac{7{,}853}{l}, \quad k_3 = \frac{10{,}996}{l}$$

Frecvențele respective ale oscilațiilor proprii, după formula (63) sunt egale cu:

$$\varphi_1 = \frac{22{,}4}{l^2} \sqrt{\frac{EI \cdot g}{q}};$$

$$\varphi_2 = \frac{61{,}6}{l^2} \sqrt{\frac{EI \cdot g}{q}};$$

$$\varphi_3 = \frac{121}{l^2} \sqrt{\frac{EI \cdot g}{q}};$$

Formele undelor staționare corespunzătoare acestor frecvențe sunt reprezentate în fig. 31.

Scanned with OKEN Scanner

§ 11. Oscilaţiile proprii ale grinzilor continui; ecuaţia celor trei momente

Pentru determinarea frecvenţelor oscilaţiilor proprii ale grinzilor continui, se poate folosi metoda întrebuinţată la calculul static al grinzilor continui şi anume: descompunerea grinzii continui în grinzi simplu rezemate, la care se aplică momentele necunoscute pe reazime $M(t)$, (fig. 32). La oscilaţiile proprii ale grinzilor, valorile momentelor pe reazim vor varia în funcţie de timp, cu aceeaşi frecvenţă ca şi oscilaţiile grinzii însăşi.

Condiţia de continuitate a axei deformate a grinzii şi anume egalitatea unghiurilor de înclinare ale tangentelor pe reazim la deschiderile adiacente, permite să alcătuim, pentru fiecare pereche de deschideri, ecuaţia celor trei momente, aşa cum se procedează la calculele statice. Din această condiţie rezultă că

$$y'_{nn}(t) = y'_{n(n+1)}t \tag{68}$$

In această expresie, $y'(t)$ este tangenta unghiului de înclinare faţă de axa deformată, primul indice arată reazimul pe care s'a considerat tangenta respectivă, iar al doilea deschiderea la care corespunde unghiul de înclinare al tangentei.

La oscilaţiile libere ale grinzilor toate valorile $y'_i(t)$ se determină cu ajutorul expresiei:

$$y'_i(t) = y'_i \sin(\varphi t + \nu)$$

şi variază cu aceeaşi frecvenţă ca şi momentul pe reazim. Pornind dela această expresie, se poate scrie:

$$y'_i(t) = M_i \bar{y}'_i(t) = M_i \bar{y}'_i \sin(\varphi t + \nu)$$

In această expresie, M_i — este valoarea momentului pe reazim;

$\bar{y}'_i(t)$ — unghiul de înclinare al tangentei faţă de axa deformată a grinzii la acţiunea momentului dinamic $\bar{M}_i(t) = 1$;

$\bar{y}'_i$ — unghiul de înclinare al tangentei în raport cu axa deformată a grinzii la acţiunea momentului static $\bar{M}_i = 1$.

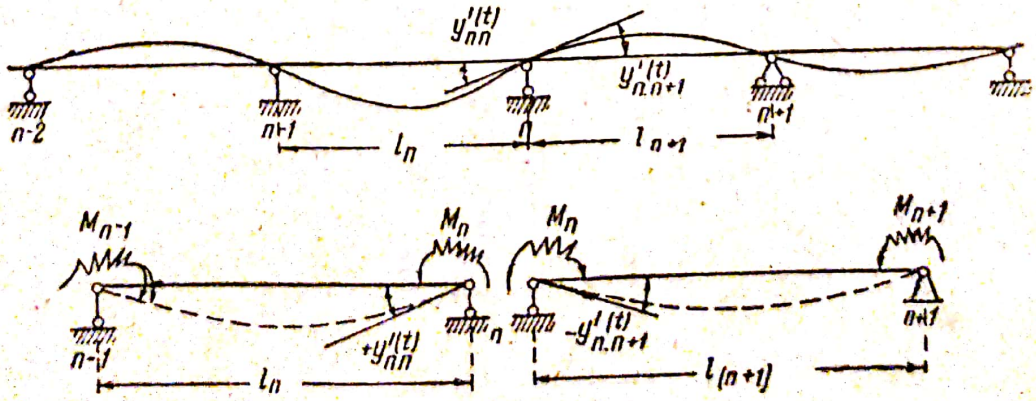


Fig. 32

Condiția (68) permite să scriem ecuația celor trei momente care apar la extremitățile deschiderilor n și $(n+1)$ la oscilațiile proprii ale unei grinzi continui:

$$M_{n-1}\,\bar{y}'_{n\,(n-1)}(t) + M_n\left[\bar{y}'_{nnn}(t) - \bar{y}'_{nn\,(n+1)}(t)\right] - M_{n+1}\,\bar{y}'_{n\,(n+1)}(t) = 0$$

sau

$$M_{n-1}\,\bar{y}'_{n\,(n-1)} + M_n\left(\bar{y}'_{nnn} - \bar{y}'_{nn\,(n+1)}\right) - M_{n+1}\,\bar{y}'_{n\,(n+1)} = 0 \qquad (69)$$

In aceste ecuații primul indice al termenilor arată numărul de ordine al reazimului la care se referă unghiul de înclinare $\bar{y}'$;

Al doilea indice — numărul reazimului la care este aplicat momentul care provoacă această înclinare;

Al treilea indice, aplicat la termenii din paranteze, arată numerele de ordine ale deschiderilor la care se referă unghiurile respective.

Numărul total al ecuațiilor de forma celei de sub (69), ca și la calculele statice, este egal cu numărul deschiderilor intermediare ale grinzii continui.

Expresiile unghiurilor de rotire $\bar{y}'$ pot fi compuse cu ajutorul formulelor (67) în ipoteza că asupra unei grinzi simplu rezemate acționează momentul pulsător $\bar{M}(t) = 1$ cu frecvența φ.

Să examinăm acum o grindă simplu rezemată (fig. 33) sub acțiunea unui moment pulsător $\bar{M}_1(t) = 1$, aplicat la capătul din dreapta și să determinăm unghiurile de rotire y'_0 și y'_l, folosind formula (67).

Din condițiile dela capetele grinzilor vom avea:

pentru $x = 0$; $y_0 = 0$, $M_0 = 0$
pentru $x = l$; $y_1 = 0$; $M_1(t) = 1$.

Pe baza acestor condiții compunem două ecuații de tipul ecuațiilor (67):

$$EIy_1 = EI\,\frac{1}{k}\,y'_0\,B_{kl} + \frac{1}{k^3}\,Q_0\,D_{kl} = 0$$

$$M_1 = EIy'_0 k\,D_{kl} + \frac{1}{k}\,Q_0\,B_{kl} = 1.$$

Rezolvându-le în raport cu y'_0 și Q_0 obținem:

$$EIy'_0 = -\frac{1}{k}\,\frac{D_{kl}}{B_{kl}^2 - D_{kl}^2}; \qquad (a)$$

$$Q_0 = k\,\frac{B_{kl}}{B_{kl}^2 - D_{kl}^2}$$

Cunoscând aceste valori, determinăm

$$EIy_1 = \frac{1}{k}\,\frac{B_{kl}\,C_{kl} - A_{kl}\,D_{kl}}{B_{kl}^2 - D_{kl}^2} \qquad (b)$$

Valorile A_{kl}, B_{kl}, C_{kl} și D_{kl}, care intră în formulele (a) și (b), se exprimă prin funcții hiperbolice (65).

Revenind la ecuația celor trei momente (69), remarcăm că, față de schema reprezentată în fig. 33, valorile unghiurilor y'_n, care intră în acea ecuație trebue să fie determinate în felul următor:

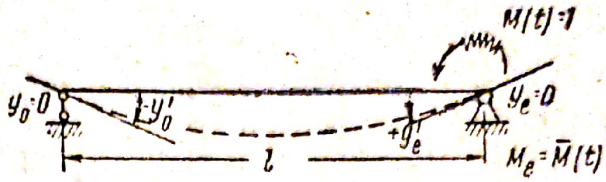


Fig. 33

$\bar{y}'_{n\,(n-1)}$ — după formula (a), însă cu alt semn, întrucât momentul $M(t) = 1$ este aplicat la reazimul $(n-1)$, iar unghiul de rotire se determină la capătul grinzii, când $x = l$;

$\bar{y}'_{nnn}$ și $\bar{y}'_{nn\,(n+1)}$ — după formula (b) cu semnul + și —, întrucât momentele $M(t) = 1$ sunt aplicate la reazimul n în deschiderea din dreapta, respectiv stânga.

$\bar{y}'_{n\,(n+1)}$ — după formula (a) întrucât momentul $M(t) = 1$ este aplicat la reazimul $(n + 1)$.

Pentru simplificarea scrierii ecuației (69), la înlocuirea valorilor $\bar{y}'_n$ cu expresiile lor în funcțiunile A_{kl}, B_{kl}, C_{kl}, și D_{kl} vom nota $k_n l_n$ cu n și $k_{n+1} l_{n+1}$ cu $(n + 1)$ indicând astfel, că

$$A_{k_n l_n} = A_n$$

se referă la deschiderea l_n. iar

$$A_{k_{n+1} l_{n+1}} = A_{n+1}$$

la deschiderea l_{n+1}.

Atunci ecuația (69) se poate scrie astfel:

$$M_{n-1} \frac{1}{E_n I_n k_n} \frac{D_n}{B_n^2 - D_n^2} +$$

$$+ M_n \left[\frac{1}{E_n I_n k_n} \cdot \frac{B_n C_n - A_n D_n}{B_n^2 - D_n^2} + \frac{1}{E_{n+1} I_{n+1} k_{n+1}} \frac{B_{n+1} C_{n+1} - A_{n+1} D_{n+1}}{B_{n+1}^2 - D_{n+1}^2} \right] +$$

$$+ M_{n+1} \frac{1}{E_{n+1} I_{n+1} k_{n+1}} \cdot \frac{D_{n+1}}{B_{n+1}^2 - D_{n+1}^2} = 0 \qquad (70)$$

In cazul când grinda continuă are un mare număr de deschideri cu diferite rigidități, se obține un sistem de ecuații a cărui rezolvare este destul de complicată. Problema se simplifică simțitor dacă rigiditățile și greutățile pe unitatea de lungime sunt egale în toate deschiderile, adică

$$EI_n = EI_{n+1} = EI$$

$$q_n = q_{n+1} = q$$

prin urmare, față de expresia (63)

$$k_n = k_{n+1} = k$$

Atunci în ecuația (70) se reduc toți factorii EIk.

Dacă, în afară de aceasta, toate deschiderile grinzii continui sunt egale, atunci ecuația (70) se reduce la următoarea formă:

$$M_{n-1} D_n + 2M_n (B_n C_n - A_n D_n) + M_{n+1} D_n = 0 \qquad (71)$$

Vom urmări acum — ca exemplu — aplicarea formulelor (70) și (71) la o grindă continuă cu două deschideri cu rigiditatea și cu greutatea pe unitatea de lungime constante, deschiderile având însă mărimi diferite l_1 și l_2. Intr'o asemenea grindă există numai un singur moment pe reazimul dela mijloc, de aceea în ecuația (70) rămâne numai un singur termen. Scriind această ecuație, înlocuind valorile A, B, C, și D cu expresiile lor în funcțiuni hiperbolice (65) și făcând o transformare simplă, obținem:

$$M_1(t)\left[\frac{\operatorname{ch} kl_1 \sin kl_1 - \operatorname{sh} kl_1 \cos kl_1}{2 \operatorname{sh} kl_1 \sin kl_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{\operatorname{ch} kl_2 \sin kl_2 - \operatorname{sh} kl_2 \cos kl_2}{2 \operatorname{sh} kl_2 \sin kl_2}\right] = 0 \qquad (a)$$

sau

$$M_1(t)\,[(\operatorname{ctgh} kl_1 - \operatorname{ctg} kl_1) + (\operatorname{ctgh} kl_2 - \operatorname{ctg} kl_2)] = 0$$

Valoarea momentului $M_1(t)$ fiind diferită de zero, impune condiția ca expresia din parantezele cu cârlige să fie egală cu zero.

Valorile lui k, care intră în această expresie, se determină prin încercări, substituind valorile kl_1 și $k\mu l_2 = k\frac{l_2}{l_1} l_1$.

In cazul când $l_2 = 2l_1$ și $kl_2 = k2l_1$ găsim pentru kl_1 valoarea minimă egală cu $kl_1 = 1{,}78$.

Ținând seama de aceasta, din ecuația (63) rezultă

$$\varphi = \frac{3{,}16}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Dacă deschiderile grinzii sunt egale

$$l_1 = l_2 = l$$

expresia (a) se aduce la următoarea formă:

$$M_1(t)\,\frac{\operatorname{ch} kl \cdot \sin kl - \operatorname{sh} kl \cdot \cos kl}{\operatorname{sh} kl \cdot \sin kl} = 0$$

După transformare avem

$$M_1(t)\,(\operatorname{ctgh} kl - \operatorname{ctg} kl) = 0.$$

Din această expresie rezultă că o grindă continuă cu două deschideri poate avea două feluri de oscilații.

Oscilațiile de primul fel se produc pentru condiția

$$M_1(t) = 0$$

Prin urmare, primul grup de unde staționare la oscilațiile unei

grinzi continui cu două deschideri va fi identic cu acela dela o grindă simplu rezemată (fig. 29) având următoarea valoare a frecvențelor :

$$\varphi_1 = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\varphi_3 = \frac{4\ \pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \ldots \text{ etc.}$$

Al doilea fel de oscilații posibile la aceeași grindă se va produce atunci când condiția de mai jos este îndeplinită

$$\text{ctgh } kl - \text{ctg } kl = 0$$

Această ecuație se transformă ușor sub forma următoare

$$\text{tg } kl - \text{tgh } kl = 0$$

Din această relație se determină valorile kl la oscilațiile grinzilor încastrate la un capăt și liber rezemate la celălalt (a se vedea problema 17).

Prin urmare, al doilea grup de unde staționare la oscilațiile unei grinzi continui cu două deschideri va fi același ca și la grinzile încastrate la un capăt și liber rezemate la celălalt (fig. 27 a).

Frecvențele la care se produc aceste oscilații se determină prin expresiile :

$$\varphi_2 = \frac{15{,}4}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}},\quad \varphi_4 = \frac{49{,}1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \ldots \text{ etc.}$$

Probleme și exerciții

13. Să se determine frecvențele oscilațiilor proprii ale sistemului înfățișat în fig. 34.

Indicație. Sistemul este static nedeterminat, prin urmare deplasările trebue să fie calculate ca și într'un sistem static nedeterminat. La calcul se recomandă ca să se considere momentul din nodul 3 ca necunoscută suplimentară

$$EI\ \delta_{11} = \frac{b^3}{48} - \frac{b^2}{16}X_1 = 0{,}008\ h^3$$

$$EI\ \delta_{22} = 0{,}0143\ h^3;\quad EI\ \delta_{12} = -\ 0{,}00417\ h^3.$$

Răspuns : Coeficienții caracteristici ai ecuațiilor frecvențelor sunt :

$$\lambda_1 = \frac{EI}{mh^3\varphi_1^2} = 0{,}01634;$$

$$\lambda_2 = \frac{EI}{mh^3\varphi_2^2} = 0{,}00596.$$

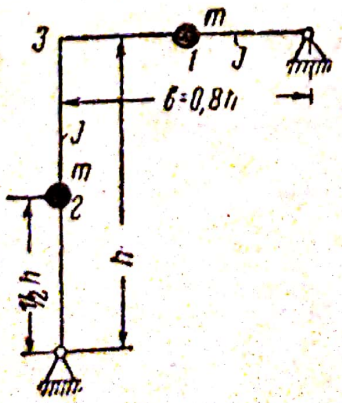


Fig. 34

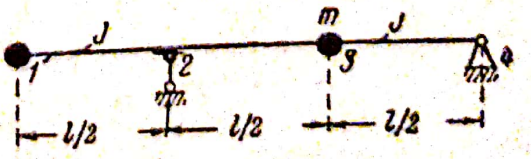


Fig. 35

14. Să se determine frecvența oscilațiilor proprii ale grinzii în consolă înfățișată în fig. 35.

Indicație.

$$EI\,\delta_{11} = \frac{1}{8}\,l^3; \qquad EI\,\delta_{22} = \frac{1}{48}\,l^3;$$

$$EI\,\delta_{12} = -\frac{1}{32}\,l^3$$

Răspuns :

$$\varphi_1 = 2{,}74\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \quad \varphi_2 = 9{,}05\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

15. Să se determine frecvența oscilațiilor proprii ale unei grinzi continui cu trei deschideri (fig. 36).

Indicație. Sistemul este static nedeterminat. Pentru determinarea deplasărilor, trebue să găsim mai întâi momentele necunoscute pe reazim.

Deplasările se determină prin următoarele valori :

$$EI\,\delta_{11} = EI\,\delta_{33} = 0{,}975; \qquad EI\,\delta_{12} = EI\,\delta_{32} = -0{,}406;$$

$$EI\,\delta_{13} = 0{,}10; \qquad EI\,\delta_{22} = 1{,}33.$$

Ecuația frecvențelor reprezintă un determinant de gradul al treilea.

Folosindu-ne de simetria grinzii, determinantul se simplifică și se reduce la următoarea formă :

$$(\lambda - 0{,}875)\begin{vmatrix} (1{,}075-\lambda) & -0{,}812 \\ -0{,}406 & (1{,}330-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Una din rădăcini se obține din ecuația

$$\lambda - 0{,}875 = 0$$

Celelalte două rădăcini se determină din condiția

$$\begin{vmatrix} (1{,}075-\lambda) & -0{,}812 \\ -0{,}406 & (1{,}330-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

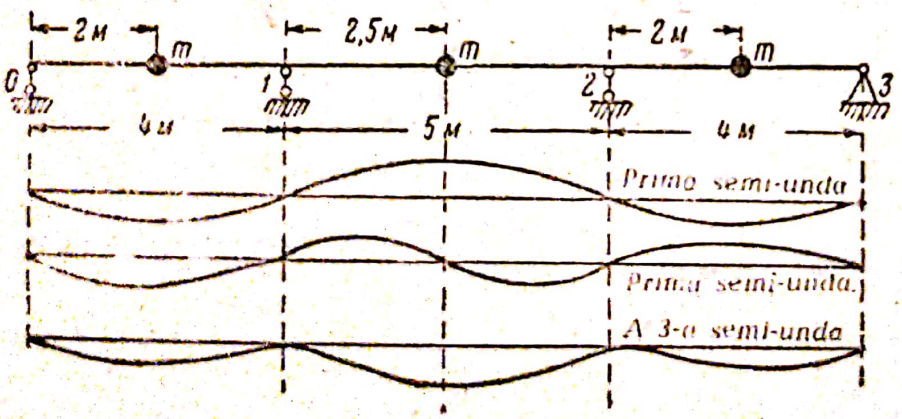


Fig. 36

Răspuns :

$$\varphi_1 = 0{,}75\sqrt{\frac{EI}{m}} \qquad \varphi_2 = 1{,}07\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\varphi_3 = 1{,}28\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Forma axelor deformate este reprezentată în fig. 36.

16. Să se calculeze frecvențele oscilațiilor proprii ale unei grinzi simplu rezemate, la care ținem seama de greutatea proprie.

Răspuns : Ecuația caracteristică a soluției exacte se determină din relația

$$\text{sh } kl \sin kl = 0$$

care va fi satisfăcută pentru $k = n\frac{\pi}{l}$.

Frecvențele oscilațiilor sunt:

$$\varphi_1 = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}; \qquad \varphi_2 = \frac{4\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \ldots \text{etc.}$$

17. Să se calculeze exact frecvența a două semi-unde de oscilații proprii ale unei grinzi încastrate la un capăt și liber rezemate la celălalt.

Răspuns : Ecuația caracteristică a soluției exacte este

$$\text{tgh } kl \quad \text{tg } kl$$

Frecvența oscilațiilor

$$\varphi_1 = \frac{15{,}4}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}; \qquad \varphi_2 = \frac{49{,}1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \ldots \text{etc}$$

18. Să se deducă ecuația care determină valorile frecvențelor oscilațiilor proprii ale unei grinzi continui cu trei deschideri egale, având rigiditatea constantă și la care se ia în considerare greutatea proprie.

Răspuns : Ecuația caracteristică a frecvențelor este

$$2\,(\text{ch } kl \cdot \sin kl - \text{sh } kl \cdot \cos kl) + \text{sh } kl - \sin kl = 0.$$

B. *METODE APROXIMATIVE PENTRU CALCULUL FRECVENȚELOR.*

§ 12. Problemele care stau în fața metodelor aproximative

In paragrafele precedente s'au analizat procedeele exacte de calcul ale frecvențelor. Aplicarea acestor metode pentru sistemele cu grade de libertate mai mare decât trei, necesită calcule dificile care se complică și mai mult când se ține seama și de greutatea proprie a construcțiilor. Din această cauză se recurge la aplicarea de metode aproximative.

Calculul frecvențelor nu ar întâmpina dificultăți, dacă s'ar cunoaște forma undei staționare care se produce la oscilații. In legătură cu aceasta, problema care se pune la metodele aproximative se rezumă la alegerea unei curbe care, ca formă, să se apropie de curba deformației ce se produce la oscilații.

Al doilea procedeu de simplificare a problemei constă în înlocuirea maselor repartizate pe lungimea elementului cu mase concentrate în diferite puncte. Trebue să avem în vedere că această metodă dă o exactitate suficientă la calculul primei frecvențe (frecvența minimă), însă poate să dea erori considerabile la determinarea frecvențelor superioare.

§ 13. Metoda energetică

La baza acestei metode se găsește legea conservării energiei. La oscilațiile sistemului, în oricare moment suma energiei cinetice și a celei potențiale rămâne constantă, adică

$$U + V = C$$

In § 1 am remarcat că, în momentul deviației maxime a masei din poziția ei de echilibru, energia cinetică este egală cu zero, iar energia potențială trece printr'un maximum; din contra, în momentul trecerii masei prin poziția de echilibru, energia cinetică are valoarea maximă, iar energia potențială se anulează.

Aceste două momente ale oscilației ne oferă posibilitatea să alcătuim două expresii ale lucrului mecanic și egalându-le să obținem ecuațiile pentru determinarea frecvenței.

Să presupunem că valoarea deviației într'un punct oarecare al sistemului se determină prin expresia

$$y(x, t) = y(x) \sin(\varphi t + \nu)$$

Vitesa corespunzătoare va fi:

$$v = \dot{y}(x, t) = y(x)\, \varphi \cos(\varphi t + \nu)$$

Energia cinetică se va obține din formula

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l mv^2\, dx = \frac{1}{2}\varphi^2 \cos^2(\varphi t + \nu)\int_0^l m(x)\, y^2(x)dx.$$

Această energie are valoarea maximă atunci când $\cos(\varphi t + \nu) = 1$ și este

$$V_{max} = \frac{1}{2}\varphi^2 \int_0^l m(x)\, y^2(x)\, dx \qquad (72)$$

Valoarea energiei potențiale va fi:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\, [y''(x, t)]^2\, dx = \frac{1}{2}\sin^2(\varphi t + \nu) \cdot \int_0^l [y''(x)]^2\, EI\, dx$$

Valoarea maximă a energiei potențiale va fi atunci când $\sin(\varphi t + \nu) = 1$;

$$U_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l [y''(x)]^2\, EIdx \qquad (73)$$

Egalând expresiile (72) și (73) și rezolvându-le în raport cu φ^2, vom obține

$$\varphi^2 = \frac{\int_0^l [y''(x)]^2\, EIdx}{\int_0^l m(x)\, y^2(x)\, dx}. \qquad (74)$$

Formula (74) determină frecvența în funcție de ordonata $y(x)$ a axei deformate prin oscilații. Ecuația axei deformate nu ne este cunoscută și trebue să o alegem, satisfăcând condițiile de fixare pe reazim. Trebue să observăm că la folosirea formulei (74) ecuația axei deformate poate fi aleasă cu aproximația parametrului arbitrar, întrucât

valoarea acestui parametru va intra atât la numitor cât și la numărător și deci, se va reduce.

Formula (74) poate fi transformată introducând în locul expresiei energiei potențiale a deformației (73) valoarea lucrului mecanic al forțelor exterioare; aplicarea acestui procedeu se recomandă în cazul când sistemul se găsește atât sub acțiunea greutății proprii cât și a sarcinilor exterioare.

Dacă se păstrează condițiile de mai sus că fiecare punct de aplicație al maselor suferă o deplasare

$$y(x, t) = y(x) \sin (\varphi t + \nu)$$

atunci lucrul mecanic total al forțelor exterioare $m(x)\, g$, așezate pe toată lungimea sistemului, se va scrie astfel:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l m(x)\, g \cdot y(x, t)\, dx = \frac{1}{2} \sin (\varphi t + \nu) \int_0^l m(x)\, g \cdot y(x)\, dx$$

Ținând seamă de faptul că valoarea maximă a lucrului mecanic va avea loc atunci când $\sin (\varphi t + \nu) = 1$, substituim expresia acestui lucru mecanic în numărătorul formulei (74) în locul expresiei energiei potențiale și obținem

$$\varphi^2 = \frac{\int_0^l m(x)\, gy(x)\, dx}{\int_0^l m(x)\, y^2(x)\, dx} \qquad (75)$$

Dacă pe sistem mai există o încărcare prin sarcini concentrate P și punctele lor de aplicație la devierea maximă a sistemului se deplasează cu valoarea y_p, atunci formula (75) trebue să fie modificată prin introducerea la numărător a valorii lucrului mecanic produs de acele sarcini

$$\varphi^2 = \frac{\int_0^l m(x)\, gy(x)\, dx + \sum P y_p}{\int_0^l m(x)\, y^2(x)\, dx} \qquad (76)$$

Să analizăm acum un exemplu de determinare a frecvenței oscilațiilor libere ale unei grinzi simplu rezemate, așezată orizontal, cu masa uniform distribuită și rigiditatea constantă pe toată lungimea.

Admitem drept curbă a undei staționare ecuația axei deformate a grinzii datorită acțiunii unei sarcini uniform repartizate $q = mg$.

$$y(x) = \frac{q}{24EI}(l^3 x - 2\, lx^3 + x^4)$$

Derivata a doua a acestei ecuații este

$$y''(x) = \frac{q}{2\, EI}(x^2 - xl)$$

Calculăm integralele numărătorului și numitorului formulei (74)

$$\int_0^l [y''(x)]^2\,dx = \left(\frac{q}{2\,EI}\right)^2 \int_0^l (x^4 + l^2x^2 - 2\,lx^3)\,dx = \frac{1}{30}\left(\frac{q}{2\,EI}\right)^2 l^5 \quad \text{(a)}$$

$$\int_0^l y^2(x)\,dx = \left(\frac{q}{24EI}\right)^2 \int_0^l (l^6x^2 + 4\,l^2x^6 + x^8 - 4\,l^4x^4 + 2\,l^3x^5 - 4\,lx^7)\,dx =$$

$$= \left(\frac{q}{24\,EI}\right)^2 \frac{31}{630}\,l^9 \quad \text{(b)}$$

Substituind valorile găsite (a) și (b) în ecuația (74) obținem

$$\varphi = \sqrt{\frac{q^2\,l^5\,630\cdot 24^2\,(EI)^2}{30\cdot 4\,(EI)^2\,31\,q^2\,l^9\,m}} = \frac{9{,}87}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Calculul frecvenței după formula (75) se face pe baza următoarelor date: numărătorul din formula (75) se determină prin valoarea

$$\int_0^l mgy(x)\,dx = \frac{q}{24EI}\int_0^l (l^3x - 2\,lx^3 + x^4)\,dx = \frac{ql^5}{120\,EI};$$

iar numitorul prin expresia (b).

In consecință, valoarea frecvenței va fi

$$\varphi = \sqrt{\frac{g\;24^2\,(EI)\cdot 630\;q\cdot l^5}{31\cdot q^2\,l^9\,120\;EI}} = \frac{9{,}87}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

ceea ce corespunde cu valoarea frecvenței obținută mai înainte (a se vedea problema 16).

Exemplul 5. *Să se determine prin metoda energetică aproximativă frecvența oscilațiilor proprii ale unei grinzi cu secțiunea constantă, încastrată la extremități.*

1) Determinăm frecvența după formula (74). Drept axă deformată se consideră curba definită prin ecuația

$$y = \frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right) \quad \text{(a)}$$

Derivata a doua a acestei expresii este

$$y'' = \frac{q}{24EI}(2\,l^2 - 12\,lx + 12\,x^2)$$

Cu ajutorul acestor elemente calculăm numărătorul și numitorul din formula (74): numărătorul este:

$$\int_0^l [y''(x)]^2\,EI\,dx = \frac{q^2}{24^2EI}\int_0^l (2\,l^2 - 12\,lx + 12\,x^2)^2\,dx = \frac{q^2}{24^2EI}\cdot\frac{4}{5}\,l^5;$$

iar numitorul:

$$\int_0^l my^2(x)\,dx = m\frac{q^2}{24^2(EI)^2}\int_0^l (l^2x^2 - 2\,lx^3 + x^4)^2\,dx = m\frac{q^2}{24^2(EI)^2}\frac{1}{630}\,l^9. \quad \text{(b)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza acestor date, rezultă că frecvența va fi egală cu

$$\varphi = \sqrt{\frac{4 \cdot 630\, EI}{5\, l^4 m}} = \frac{22{,}4}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

2) Determinăm frecvența cu ajutorul formulei (75).

Forma undei se consideră definită prin ecuația (a). Calculăm numărătorul și numitorul formulei (75):

Numărătorul este

$$mg \int_0^l y(x)\, dx = mg\, \frac{q}{24\, EI} \int_0^l (l^2 x^2 - 2\, l x^3 + x^4)\, dx = mg\, \frac{q}{24EI} \cdot \frac{1}{30}\, l^5$$

Numitorul se determină prin formula (b).

Pe baza acestor elemente frecvența va fi egală cu:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1 \cdot 630 \cdot 24^2 \cdot EIg}{24 \cdot 30 \cdot ql^4}} = \frac{22{,}4}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Comparând rezultatele obținute cu valoarea exactă (a se vedea exemplul 4)

$$\varphi = \frac{22{,}4}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

constatăm că metoda energetică de calcul aproximativ dă aceleași rezultate ca și metoda exactă.

§ 14. Metoda maselor reduse

Principiul acestei metode constă în înlocuirea calculului frecvențelor oscilațiilor proprii ale sistemului cu mai multe grade de libertate printr'un calcul al frecvenței aceluiași sistem, însă cu un singur grad de libertate. In acest scop trebue să găsim o astfel de masă concentrată M care, fiind aplicată pe sistem, să producă o frecvență de oscilații apropiată de frecvența minimă a sistemului cu masa uniform distribuită.

Când o astfel de masă va fi găsită, calculul frecvențelor oscilațiilor se poate face cu ajutorul formulei (13):

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{M\delta}} \tag{77}$$

Determinarea masei fictive M se face în ipoteza că *valorile energiei cinetice la oscilațiile sistemului cu mai multe grade de libertate și la oscilațiile sistemului cu un singur grad de libertate sunt egale.*

Să presupunem că ordonatele undei staționare cu o singură semiundă (ton) la oscilațiile sistemului cu mai multe grade de libertate se determină prin ecuația

$$y(x, t) = y(x)\, F(t)$$

Derivând această expresie în raport cu timpul, obținem valoarea vitesei

$$v = \dot{y}(x, t) = y(x)\, \frac{d\, F(t)}{dt}$$

Cunoscând vitesa, putem să scriem expresia energiei cinetice:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l m(x)\, v^2\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{dF(t)}{dt}\right)^2 \int_0^l m(x)\, y^2(x)\, dx. \qquad (a)$$

în care $m(x)$ este intensitatea masei într'un element dx.

Să analizăm acum acelaș sistem însă cu un singur grad de libertate, adică la acțiunea masei M, aplicată în punctul a.

Ordonata undei staționare în punctul a poate să fie exprimată prin ecuația

$$y(x,t) = y_a F(t)$$

în care y_a este amplitudinea oscilațiilor punctului de aplicație al masei M.

Vitesa de oscilație a acestui punct va fi:

$$v = \dot{y}(x,t) = y_a \frac{dF(t)}{dt}$$

Ținând seamă de această expresie, energia cinetică se determină prin următoarea formulă

$$V = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} My_a^2 \left(\frac{dF(t)}{dt}\right)^2 \qquad (b)$$

Conform condiției stabilite mai înainte, valorile energiei cinetice *(a)* și *(b)* trebue să fie egale.

Egalând aceste valori, determinăm masa concentrată căutată

$$M = \frac{\int_0^l m(x)\, y^2(x)\, dx}{y_a^2} \qquad (78)$$

Examinând expresia (78) se vede că pentru ca să găsim masa căutată M, trebue să cunoaștem ecuația axei deformate prin oscilațiile grinzii; această ecuație nu ne este cunoscută și trebue să o alegem.

Valoarea ordonatei y_a, care intră în formula (78) trebue să fie egală cu devierea maximă față de poziția de echilibru a masei M. Este avantajos să alegem punctul a la mijlocul deschiderii.

Se recomandă ca ordonata $y(x)$ să fie exprimată în funcție de ordonata y_a a deformației maxime.

De exemplu, dacă la determinarea masei M a unei grinzi simplu rezemate admitem că curba undei este egală cu curba axei deformate a grinzii sub acțiunea sarcinii concentrate $P = 1$, aplicată în mijlocul deschiderii, atunci:

$$y_a = y_{l/2} = \frac{l^3}{48EI};$$

$$y(x) = \frac{1}{48EI}(3l^2x - 4x^3) = y_{l/2}\, \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Substituind valorile acestor ordonate în ecuația (78), obținem următoarea valoare a masei căutate M pentru cazul când asupra grinzii acționează mase uniform distribuite cu intensitatea m:

$$M = \frac{2m}{l^6} \int_0^{l/2} (3l^2x - 4x^3)^2 \, dx = \frac{17}{35} ml$$

La această valoare a masei concentrate, frecvența oscilațiilor libere se determină cu ajutorul formulei (77);

$$\varphi = \sqrt{\frac{48\ EI \cdot 35}{17\ ml^4}} = \frac{9{,}92}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

întrucât în exemplul de față

$$\delta = \frac{1}{y_a}$$

Diferența față de valoarea exactă a frecvenței

$$\varphi = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{9{,}87}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

reprezintă 0,5%.

În cele ce preced, am examinat un caz particular de calcul al unei mase concentrate, admițând că curba $y(x)$ este axa deformată a grinzii, solicitată de o sarcină concentrată.

Drept curbă $y(x)$ poate fi admisă o curbă oarecare: parabolă, sinusoidă, etc.

Calculele efectuate au demonstrat că la determinarea după diferite curbe a unei mase concentrate, frecvența oscilațiilor variază foarte puțin față de valoarea exactă.

Mai jos, sunt indicate valorile frecvențelor obținute la determinarea masei M în ipoteza deformației grinzii după diferite curbe:

a) după curba deformațiilor produse de o sarcină concentrată situată în mijlocul deschiderii grinzii

$$y(x) = y_{l/2} \frac{3l^2x - 4\ x^3}{l^3};$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{48\ EI}{l^3 \cdot 0{,}486\ ml}} = \frac{9{,}92}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

eroarea este de + 0,5%;

b) după curba deformațiilor produse de o sarcină uniform repartizată

$$y(x) = y_{l/2} \frac{16}{5l^4} (l^3x - 2\ lx^3 + x^4);$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{48\ EI}{l^4 \cdot 0{,}504\ m}} = \frac{9{,}76}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

eroarea este de — 0,9%;

Scanned with OKEN Scanner

c) după o sinusoidă

$$y(x) = y_{l/2} \sin \frac{\pi}{l} x;$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{48\ EI}{l^3 \cdot 0{,}5\ ml}} = \frac{9.81}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

eroarea este de — 0,7%;

d) după o curbă parabolică

$$y(x) = y_{l/2} \frac{4}{l^2} x\,(l - x)$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{48\ EI}{l^3 \cdot 0{,}533\ ml}} = \frac{9{,}5}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

eroarea este de — 3,7%.

Aceste exemple arată că metodele aproximative aplicate pentru calculul semi-undelor (tonului) principale ale grinzilor pe reazime rigide dau rezultate destul de exacte.

Exemplul 6. *Să se determine frecvența oscilațiilor unei grinzi cu secțiunea constantă, cu extremitățile încastrate, aplicând metoda maselor reduse.*

Ca formă a undei staționare admitem axa deformată a grinzii sub acțiunea unei încărcări uniform repartizate:

$$y = \frac{ql^4}{24\ EI} \left(\frac{x^2}{l^2} - 2\,\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$$

Săgeata în mijlocul grinzii este:

$$y_{l/2} = \frac{ql^4}{384\ EI}$$

Substituind aceste valori în formula (78), calculăm valoarea masei concentrate;

$$M = m \cdot 16^2 \int_0^l \left(\frac{x^2}{l^2} - 2\,\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)^2 dx = m \cdot 16^2 \cdot \frac{1}{630}\ l = 0{,}406\ ml.$$

Săgeata aceleași grinzi sub acțiunea unei forțe unitare concentrate va fi:

$$y_{l/2} = \frac{l^3}{192\ EI}$$

Pe baza acestor elemente, frecvența grinzii după formula (77) va fi:

$$\varphi = \sqrt{\frac{192\ EI}{l^3 \cdot 0{,}406\ ml}} = \frac{21{,}7}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Diferența față de valoarea exactă este de 3% (a se vedea exemplul 4).

§ 15. Metoda înlocuirii masei repartizate prin mase concentrate

In această metodă masa repartizată pe lungimea grinzii se înlocuește cu mase concentrate în diferite puncte. Concentrarea maselor în diferite puncte ale sistemului se face după regula momentelor, ca și în cazul repartizării la noduri a greutății proprii a unei grinzi cu zăbrele. La o astfel de repartizare a masei, sistemul cu un număr infinit de

grade de libertate se transformă într'un sistem cu unul sau câteva grade de libertate.

Prin sporirea numărului de mase concentrate se măreşte şi exactitatea calculului frecvenţelor. Insă, după cum vom vedea mai jos, în unele cazuri transformarea unui sistem cu un număr infinit de grade de libertate într'un sistem cu două, sau trei grade de libertate, dă valori oarecum exacte numai pentru prima *frecvenţă (minimă).* Pentru ca să obţinem o precizie satisfăcătoare şi la determinarea frecvenţei a doua, a treia şi a celor superioare, trebue să sporim numărul punctelor de concentrare a maselor; în practică însă nu este nevoie să se determine frecvenţa a doua precum şi cele superioare.[1)]

La alegerea punctelor de concentrare a maselor trebue să avem în vedere formele posibile ale undelor care se produc la vibrarea sistemului.

Astfel, de exemplu, pentru o grindă simplu rezemată, la determinarea primei frecvenţe este de dorit ca masa să fie concentrată la mijlocul deschiderii; din contra, într'un arc cu două articulaţii masa trebue să fie aşezată la sferturile deschiderii, întrucât la prima formă de oscilaţie a arcului corespunde o formă de oscilaţie asemenea care are punctul de inflexiune la cheia arcului.

La aplicarea acestei metode la calculul sistemelor nesimetrice se prezintă unele inconveniente, întrucât rezultatul depinde mult de alegerea judicioasă a punctelor de aplicaţie a maselor.

Această observaţie este valabilă însă numai atunci când inginerul proiectant doreşte să se limiteze la un număr redus de asemenea puncte. Astfel, de exemplu, într'o grindă încastrată la un capăt şi liberă la celălalt, concentrare maselor în două puncte — secţiunea de încastrare şi capătul liber — dă o eroare destul de mare. Rezultate bune se obţin în acest caz prin distribuirea maselor, indicată în exemplul 7.

Să examinăm determinarea frecvenţelór primelor două semi-unde ale unei grinzi simplu rezemate, provocate de o masă uniform repartizată pe lungimea grinzii.

Pentru determinarea frecvenţei primei semi-unde (ton) vom distribui masa raportând-o la reazime: $M_1 = 0.25\ ml$ şi la mijlocul grinzii: $M = 0{,}5\ ml$ (fig. 37 a). Frecvenţa oscilaţiilor libere a unei astfel de grinzi cu masa M concentrată la mijlocul deschiderii se determină prin formula (77).

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{1}{M \cdot \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 48 \cdot EI}{ml^4}} = \frac{9{,}8}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Comparând valoarea obţinută a frecvenţei cu aceea exactă

$$\varphi_1 = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{9{,}87}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

constatăm că diferenţa este numai de $0{,}7\%$.

[1)] Cu excepţia fundaţiilor sau construcţiilor pentru maşini speciale, de exemplu turbine cu turaţii mari.

Trecem acum la determinarea frecvenţei semi-undei (tonului) a doua, în care scop aplicăm pe grindă două mase $M = \frac{1}{3} ml$ în treimile deschiderii (fig. 37 b), iar restul masei îl împărţim egal între reazimele grinzii.

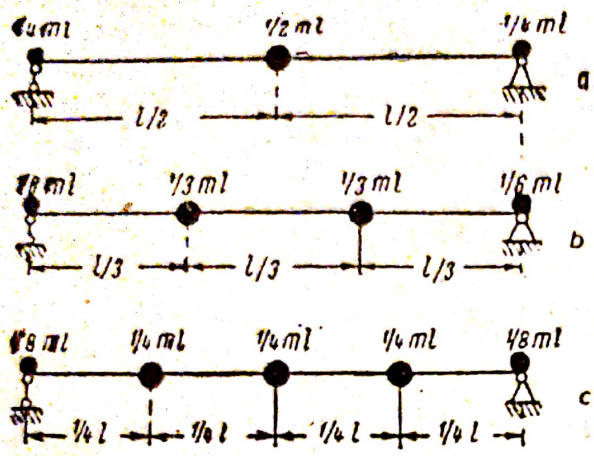


Fig. 37

Considerăm grinda cu două mase concentrate.

Deplasările unitare se determină prin valorile: .

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4}{243} \frac{l^3}{EI}$$

şi

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7}{486} \frac{l^3}{EI} = \frac{7}{8} \delta_{11}$$

Ecuaţia frecvenţelor va avea următorul aspect:

$$\begin{vmatrix} (M \delta_{11} \varphi^2 - 1) & M \delta_{12} \varphi^2 \\ M \delta_{21} \varphi^2 & (M \delta_{22} \varphi^2 - 1) \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\frac{15}{64} M^2 \delta_{11}^2 \varphi^4 - 2M \delta_{11} \varphi^2 + 1 = 0$$

Ţinând seama că $M = \frac{1}{3} ml$, obţinem

$$\varphi^2 = \frac{32 M \delta_{11}^2}{15 M^2 \delta_{11}^2} \left(1 \mp \frac{7}{8} \right) = \frac{64 \cdot 3 \cdot 243 EI}{15 \cdot m \cdot l \cdot 4} \left(1 \pm \frac{7}{8} \right)$$

din care rezultă două valori ale frecvenţelor:

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{3 \cdot 243 \cdot EI \cdot 8}{ml \cdot 4 \cdot l^3 \, 15}} = \frac{9{,}86}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\varphi_2 = \sqrt{\frac{8 \cdot 3 \cdot 243 \cdot EI}{ml \cdot 4 \cdot l^3}} = \frac{38{,}2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Comparând valorile aproximative obţinute ale frecvenţelor cu valorile exacte (a se vedea problema 16)

$$\varphi_1 = \frac{9{,}87}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \text{şi} \quad \varphi_2 = \frac{39{,}48}{l_2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

ajungem la concluzia că valoarea aproximativă a primei semi-unde diferă de valoarea exactă numai cu $0{,}1\%$, iar valoarea frecvenţei semi-undei a doua diferă de valoarea exactă cu $3{,}24\%$.

Să determinăm acum frecvenţele într'o grindă cu trei grade de libertate.

Valorile și distribuirea maselor pentru acest caz sunt indicate în fig. 37 c.

Valoarea fiecărei mase concentrate aplicată în deschidere este $M = \frac{1}{4} ml$.

Deplasările unitare în acest caz sunt :

$$\delta_{11} = \delta_{33} = \frac{3}{256} \frac{l^3}{EI}; \qquad \delta_{22} = \frac{1}{48} \frac{l^3}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = \frac{11}{768} \frac{l^3}{EI}; \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \frac{7}{768} \frac{l^3}{EI}.$$

Ecuația frecvențelor are următorul aspect :

$$\begin{vmatrix} (M\delta_{11}\varphi^2 - 1) & M\delta_{12}\varphi^2 & M\delta_{13}\varphi^2 \\ M\delta_{12}\varphi^2 & (M\delta_{22}\varphi^2 - 1) & M\delta_{12}\varphi^2 \\ M\delta_{13}\varphi^2 & M\delta_{12}\varphi^2 & (M\delta_{11}\varphi^2 - 1) \end{vmatrix} = 0$$

Substituind în această ecuație valorile deplasărilor unitare și rezolvând-o în raport cu φ, obținem următoarele valori :

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{768\,EI}{Ml^3\,31{,}57}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 768\,EI}{ml^4\,31{,}57}} = \frac{9{,}865}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\varphi_2 = \sqrt{\frac{768 \cdot EI}{Ml^3 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 768 \cdot EI}{ml^4 \cdot 2}} = \frac{39{,}2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\varphi_3 = \sqrt{\frac{768 \cdot EI}{Ml^3 \cdot 0{,}43}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 768 \cdot EI}{ml^4 \cdot 0{,}43}} = \frac{84{,}6}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Comparând valorile aproximative obținute pentru frecvențe cu cele exacte, constatăm că eroarea la determinarea primei frecvențe este mai mică decât 0,05%, iar la frecvența a doua, mai mică decât 0,7% ; pentru frecvența a treia, a cărei valoare exactă se determină cu formula

$$\varphi_3 = \frac{88{,}74}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

eroarea este de 4,7%.

Exemplul 7. — *Să se determine valorile frecvențelor primelor două semiunde la o grindă încastrată la un capăt și liberă la celălalt (în consolă) (fig. 39).*

1. Să examinăm o grindă sub acțiunea unei singure mase, a cărei poziție și valoare se stabilește, descompunând încărcarea continuă în trei porțiuni *ab*, *bc* și *cd*. Raportăm masa distribuită din porțiunea *ab* în secțiunea de încastrare, iar aceea din porțiunea *bd* în centrul *c* al porțiunii (fig. 38 a).

In acest caz, ca o primă aproximație, frecvența oscilațiilor se determină cu ajutorul formulei (77)

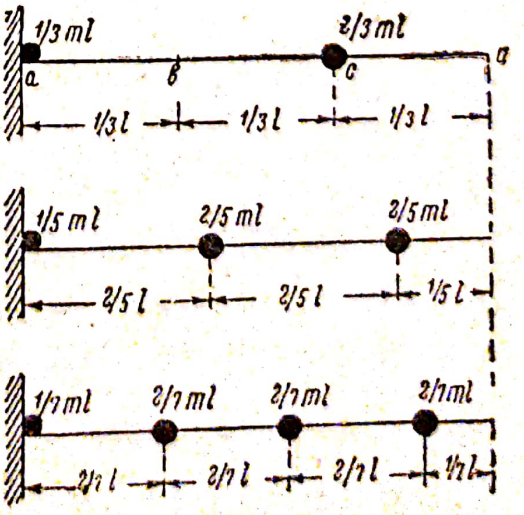


Fig. 38

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{M\,\delta_c}}$$

Determinăm valoarea δ_c :

$$\delta_c = \frac{1}{3\,EI}\left(\frac{2}{3}\,l\right)^3 = \frac{8}{81}\,\frac{l^3}{EI}$$

Prin urmare

$$\varphi = \sqrt{\frac{81}{8}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{EI}{ml^4}} = \frac{3{,}89}{l^3}\sqrt{\frac{EI}{m}}\,.$$

Față de valoarea exactă (a se vedea exemplul 3)

$$\varphi = \frac{3{,}51}{l^3}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

eroarea atinge 10,7%.

2. Pentru ca să analizăm aproximația a doua, vom examina o grindă supusă la acțiunea a două mase și descompunem masa repartizată în cinci porțiuni. Schema de distribuție a maselor precum și valorile lor respective sunt arătate în fig. 38 b.

Determinăm deplasările unitare ale punctelor de aplicație a acestor mase :

$$\delta_{11} = \frac{1}{3EI}\left(\frac{2}{5}\,l\right)^3 = \frac{8}{375}\,\frac{l^3}{EI}\,;$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3EI}\left(\frac{4}{5}\,l\right)^3 = \frac{64}{375}\,\frac{l^3}{EI}\,;$$

$$\delta_{12} = \delta_{22} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{5}\,l\cdot\frac{2}{5}\,l\cdot\frac{2}{3}\cdot l = \frac{4l^3}{75EI}$$

Ecuația frecvențelor are următorul aspect :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{8}{375}\cdot\frac{2}{5}\,\frac{ml^4}{EI}\,\varphi^2 - 1\right) & \frac{20}{375}\cdot\frac{2}{5}\,\frac{ml^4}{EI}\,\varphi^2 \\ \frac{20}{375}\cdot\frac{2}{5}\,\frac{ml^4}{EI} & \left(\frac{64}{375}\cdot\frac{2}{5}\,\frac{ml^4}{EI}\,\varphi^2 - 1\right) \end{vmatrix} = n^2 \begin{vmatrix} \left(2\varphi^2 - \frac{1}{n}\right) & 5\varphi^2 \\ 5\varphi^2 & \left(16\varphi^2 - \frac{1}{n}\right) \end{vmatrix} = 0$$

în care

$$n = \frac{8}{1875}\,\frac{ml^4}{EI}\,.$$

Rezolvând determinantul, obținem

$$7\,\varphi^4 - 18\,\varphi^2\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 0,$$

de unde

$$\varphi^2 = \frac{1}{7n}\,[9 \pm 8{,}6]\ \text{sec}^{-2}\,.$$

Substituind în această expresie valoarea lui n, obținem frecvența

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{1875}{8\cdot 17{,}6}\cdot\frac{EI}{ml^4}} = \frac{3{,}65}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

cu o eroare 3,3% și frecvența

$$\varphi_2 = \sqrt{\frac{1875}{8\cdot 94}\cdot\frac{EI}{ml^4}} = \frac{24{,}2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

cu eroare de 10% față de valoarea exactă (a se vedea exemplul 3).

Scanned with OKEN Scanner

3. Pentru precizarea valorii frecvenței a doua, descompunem masa pe lungimea grinzii în șapte porțiuni și o înlocuim cu trei mase $M = \frac{2}{7}\, ml$ fiecare, iar $\frac{1}{7}\, ml$ o raportăm la secțiunea de încastrare (fig. 38 b).

Calculăm deplasările unitare:

$$\delta_{11} = \frac{8}{1\,029}\,\frac{l^3}{EI};\quad \delta_{22} = \frac{64}{1\,029}\,\frac{l^3}{EI};\quad \delta_{33} = \frac{216}{1\,029}\,\frac{l^3}{EI};$$

$$\delta_{12} = \frac{20}{1\,029}\,\frac{l^3}{EI};\quad \delta_{13} = \frac{32}{1\,029}\,\frac{l^3}{EI};\quad \delta_{23} = \frac{112}{1\,029}\,\frac{l^3}{EI}.$$

Ecuația frecvențelor se transformă astfel:

$$\Delta = n^3 \begin{vmatrix} \left(2\varphi^2 - \frac{1}{n}\right) & 5\varphi^2 & 8\varphi^2 \\ 5\varphi^2 & \left(16\varphi^2 - \frac{1}{n}\right) & 28\varphi^2 \\ 8\varphi^2 & 28\varphi^2 & \left(54\varphi^2 - \frac{1}{n}\right) \end{vmatrix} = 0$$

în care

$$n = \frac{8}{7\,203}\,\frac{EI}{ml^4},$$

de unde

$$26\,\varphi^6 - 121\,\frac{1}{n}\,\varphi^4 + 72\,\frac{1}{n^2}\,\varphi^2 - \frac{1}{n^3} = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații exprimă valorile frecvențelor:

$$\varphi_1^2 = \frac{1}{n}\,\frac{1}{70{,}3};$$

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{7\,203}{8.70{,}3}\cdot\frac{EI}{ml^4}} = \frac{3{,}575}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\varphi_2^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1{,}7};$$

$$\varphi_2 = \sqrt{\frac{7\,203}{8.1{,}7}\cdot\frac{EI}{ml^4}} = \frac{23}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

cu erori de 1,7% respectiv 4,5% față de valoarea exactă (a se vedea exemplul 3.)

§ 16. Metoda aproximațiilor succesive

Metoda aproximațiilor succesive permite ca să se calculeze frecvențele oscilațiilor sistemelor cu o exactitate mai mare și ne dă posibilitatea să apreciem gradul de precizie al rezultatelor obținute, comparând două aproximații succesive.[1)]

Pentru ca să explicăm principiul acestei metode, vom examina un sistem cu mai multe grade de libertate asupra căruia acționează o serie de forțe.

[1)] Cu toate că această metodă este cunoscută încă din anul 1905, ea a fost elaborată în amănunte de K. S. Zavriev și publicată în 1946 sub denumirea de „Metoda generalizată a aproximațiilor succesive". A se vedea K. S. Zavriev: „Dinamica construcțiilor", 1946, capitolul VII.

Ecuaţia deplasării unui punct oarecare al sistemului poate fi scrisă în felul următor:

$$y_i(t) = v_i \sin(\varphi t + \nu)$$

în care v_i este amplitudinea punctului i (deplasarea maximă a punctului i faţă de poziţia de echilibru).

Prin urmare, forţa de inerţie a unui element infinit mic are drept valoare:

$$-m\ddot{y}(t) = m_i \varphi^2 v_i \sin(\varphi t + \nu).$$

Pentru deplasarea maximă a punctului i. când

$$\sin(\varphi t + \nu) = 1,$$

forţa de inerţie va avea valoarea maximă egală cu

$$m_i \varphi^2 v_i . \qquad (79)$$

Dacă ne închipuim toate forţele de inerţie maxime sub forma unor forţe exterioare

$$P_i = m_i \varphi^2 v_i ,$$

atunci curba deformaţiilor dinamice maxime ale sistemului poate fi considerată ca o curbă a deformaţiilor sistemului sub acţiunea statică a forţelor P_i (fig. 39 a).

Paralel cu aceasta, ne putem închipui acelaşi sistem sub acţiunea forţelor fictive:

$$m_i \cdot v_i \qquad (80)$$

fiecare din aceste forţe fiind de φ^2 ori mai mică decât forţele de inerţie (79) care acţionează asupra aceluiaşi sistem în prima ipoteză (fig. 39 b). Comparând aceste două feluri de încărcări a unuia şi aceluiaşi sistem, se poate afirma că în limitele deformaţiei elastice, toate caracteristicile deplasărilor (deformaţiile, unghiurile de rotire) precum şi acelea ale forţelor interioare, calculate pentru primul caz de încărcare al sistemului, vor diferi de aceleaşi elemente calculate pentru al doilea caz de încărcare prin factorul φ^2.

In acest caz

$$\varphi^2 = \frac{z_1}{z_2} \qquad (81)$$

Prin z_1 şi z_2 se înţeleg încărcările, deformaţiile, momentele, etc.

Dacă curba deformaţiilor dinamice maxime ar fi cunoscută, atunci cu ajutorul formulei (81) se poate determina valoarea exactă a frecvenţei, însă cum această curbă nu ne este cunoscută, trebue să o alegem şi pe calea recalculării prin aproximaţii succesive, să căutăm un rezultat apropiat de cel exact.

La prima aproximaţie, se poate admite de exemplu că acceleraţiile $\ddot{y}$ ale tuturor punctelor sistemului sunt identice. Aceasta permite să înlocuim în prima aproximaţie (fig. 39 a) forţele de inerţie (79):

$$m_1 v_1 \varphi^2 = - m_1 \ddot{y}(t) = - \frac{P_1 \ddot{y}(t)_{max}}{g}$$

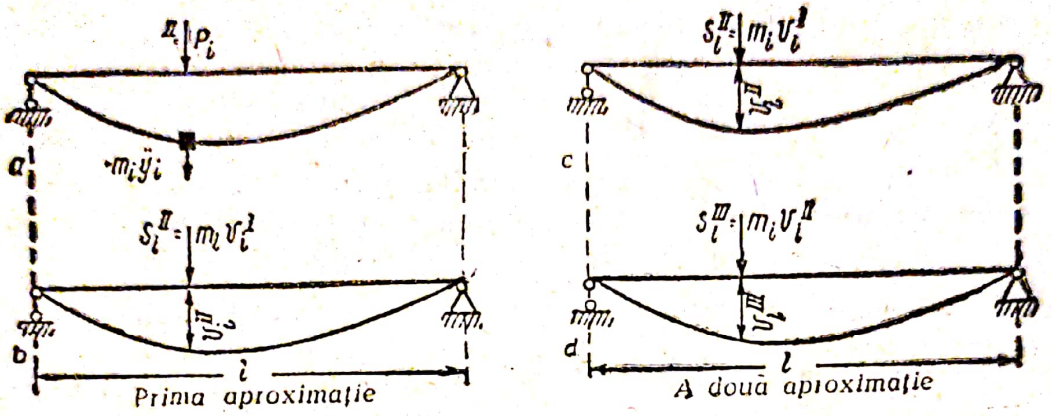


Fig. 39

prin forțele statice simple

$$S_i^I = P_i ,$$

adică prin forțe modificate în raportul $\frac{\ddot{y}}{g}$ față de forțele de inerție.

Dacă sistemul nu are altă încărcare decât greutatea proprie, atunci fiecare forță va fi:

$$S_i^I = q_1 \Delta x,$$

în care Δx reprezintă o porțiune elementară din grindă.

O asemenea substituire ne permite să determinăm toate deplasările și în special deformația v_i^I într'un punct oarecare al sistemului, folosind unul din procedeele staticii construcțiilor, însă toate aceste deplasări vor fi de $\frac{\ddot{y}}{g}$ ori mai mici decât amplitudinea.

Având în vedere metoda pentru determinarea frecvențelor indicată mai sus, trebue să analizăm același sistem în ipoteza celui de al doilea mod de încărcare sub acțiunea forțelor fictive

$$S_i^{II} = m_1 v_i^I = \frac{q_1}{g} \Delta x \, v_i^I, \tag{82}$$

micșorate în același raport ca și forțele S_i^I.

Cunoscând forțele S_i^I și S_i^{II} și ținând seama de raportul (81) putem calcula frecvența în prima aproximație:

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{S_i^I}{S_i^{II}}} = \sqrt{\frac{g}{v_i^I}} \tag{83}$$

Această expresie a frecvenței oscilațiilor proprii este analoagă cu expresia (13), valabilă pentru un sistem cu un singur grad de libertate, deci valoarea obținută a frecvenței φ_I pentru un sistem cu mai multe grade de libertate reprezintă o primă aproximație, insuficient exactă.

La a doua aproximație trebue să facem mai întâi o precizare a noțiunii încărcării S, care se introduce în locul forțelor de inerție. Valorile acestor forțe pot să fie calculate cu ajutorul formulei (79) admițând deformațiile maxime, obținute din prima aproximație și anume

$$-m_i\, v_i^I \varphi_I^2.$$

Inlocuim aceste forțe de inerție, ca și în primul caz, cu forțele proporționale,

$$S_i^{II} = m_i\, v_i^I.$$

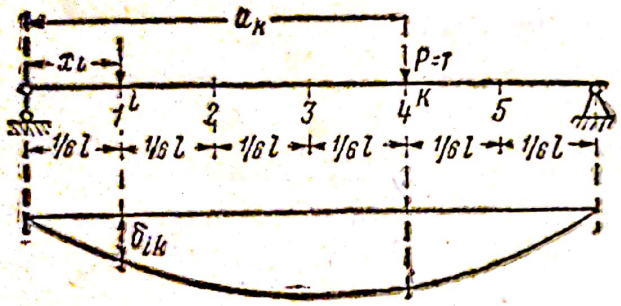


Fig. 40

Considerând aceste forțe ca o încărcare statică, calculăm deformațiile v_i^{II} în toate punctele de aplicație ale forțelor.

Folosind raportul (81), calculăm noua valoare a frecvenței

$$\varphi_{II} = \sqrt{\frac{v_i^I}{v_i^{II}}}. \qquad (84)$$

Pentru aproximația a treia considerăm sistemul sub acțiunea forțelor fictive

$$S_i^{III} = m_i\, v_i^{II}$$

ca și a unor forțe statice, ceea ce ne permite să calculăm noile valori ale deformațiilor v_i^{III} și noua frecvență

$$\varphi_{III} = \sqrt{\frac{v_i^{II}}{v_i^{III}}}.$$

Operația de recalculare se continuă până ce valorile succesive φ_{n+1} și φ_n devin egale, sau foarte apropiate una de alta.

De obiceiu, valori destul de apropiate se obțin foarte des după trei aproximații.

Se recomandă ca deformațiile v_i^I, v_i^{II}, v_i^{III} care intră în formulele frecvenței să fie luate în punctele unde se prevede amplitudinea maximă a deformației sistemului. In acest mod se asigură o accelerare a calculelor. Calculul trebue să se facă sub formă de tablou.

Exemplul 8. *Să se determine prima frecvență a oscilațiilor libere ale unei grinzi simplu rezemate având greutatea q kg/m.*[1])

Să admitem că greutatea proprie a grinzii este împărțită în șase porțiuni $\frac{1}{6}$ ql, concentrate în cinci puncte ale grinzii, în afară de reazime (fig. 40).

[1]) Acest exemplu este introdus cu scopul de a arăta operația de apropiere și exactitatea metodei aproximațiilor succesive aplicată la calculul unei grinzi pentru care există o rezolvare exactă.

Vom calcula printr'o metodă oarecare ordonatele liniei de influență a deformațiilor. In cazul de față se poate folosi în acest scop următoarea formulă (fig. 40).

$$EI\,\delta_{ik} = \frac{1}{6l^2}\,x_i\,(l-a_k)\,(2l^2a_k - la_k^2 - lx_i^2)\,.$$

In tabloul 3 sunt trecute valorile ordonatelor liniei de influență, majorate de $36^2 \cdot 6\,\frac{EI}{l^3}$ ori. Linia de influență a deformațiilor în punctele cu abscisele

$$a_k = \frac{4}{6}\,l \quad \text{și} \quad a_k = \frac{5}{6}\,l$$

este antisimetrica liniilor de influență pentru punctele cu abscisele

$$a_k = \frac{2}{6}\,l \quad \text{și} \quad a_k = \frac{1}{6}\,l$$

Tabloul 3

Abscisa secțiunii	Abscisa punctului de aplicație a sarcinii					
	$x_i = \frac{1}{6}\,l$	$x_i = \frac{2}{6}\,l$	$x_i = \frac{3}{6}\,l$	$x_i = \frac{4}{6}\,l$	$x_i = \frac{5}{6}\,l$	$\Sigma\, x_i$
1) $a_k = \frac{1}{6}\,l$	50	76	78	62	34	300
2) $a_k = \frac{2}{6}\,l$	76	108	138	112	62	496
3) $a_k = \frac{3}{6}\,l$	78	138	162	138	78	594

1. — Intrucât în prima aproximație sarcinile aplicate în toate punctele sunt egale $S^I = \frac{1}{6}\,ql$, prima deplasare ν_i^I se calculează ca suma ordonatelor fiecărei linii de influență :

$$\nu_1^I = \nu_5^I = 300 \cdot \frac{1}{6}\,ql\,\frac{l^3}{36^2 \cdot 6EI} = 50\,ql\,\frac{l^3}{36^2 \cdot 6EI}\,;$$

$$\nu_2^I = \nu_4^I = 496 \cdot \frac{1}{6}\,ql\,\frac{l^3}{36^2 \cdot 6EI} = 82\,ql\,\frac{l^3}{36^2 \cdot 6EI}\,;$$

$$\nu_3^I = 594\frac{1}{6}\,ql\,\frac{l^3}{36^2 \cdot 6EI} = 99\,ql\,\frac{l^3}{36^2 \cdot 6EI}$$

Calculăm frecvența cu ajutorul formulei (83) :

$$\varphi_I = \sqrt{\frac{g}{v_3^I}} = \sqrt{\frac{g \cdot 36^2 \cdot 6EI}{99\,ql^4}} = \frac{8{,}8}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\,.$$

Valoarea frecvenței obținută diferă de cea exactă cu 11%.

2. — Pentru a doua aproximație calculăm sarcinile S_i^{II} după formula (82) și le înmulțim apoi cu ordonatele respective δ_{ik} ; aceste produse reprezintă următoarele deplasări :

$$\nu_i^{II} = S_i^{II}\,\delta_{ik} = \nu_i^I\,\frac{q}{g}\,\frac{l}{6}\,\delta_{ik}.$$

Efectuăm calculul lui v_3^{II} pentru mijlocul grinzii, unde se prevede cea mai importantă deviere din poziția de echilibru:

$$v_{3,1}^{II} = v_{3,5}^{II} = 50 \cdot \frac{ql^4}{36^2 \cdot 6\,EI} \cdot \frac{q}{g} \cdot \frac{l}{6} 78 \cdot \frac{l^3}{36^2 \cdot 6EI} = 650\,mq\,\frac{l^8}{36^4 \cdot 6^2\,(EI)^2};$$

$$v_{3,2}^{II} = v_{3,4}^{II} = 82\,\frac{ql^4}{36^2 \cdot 6\,EI} \cdot m \cdot \frac{l}{6} 138\,\frac{l^3}{36^2 \cdot 6EI} = 1\,886\,mq\,\frac{l^8}{36^4 6^2\,(EI)^2};$$

$$v_{3,3}^{II} = 99\,\frac{ql^4}{36^2 \cdot 6\,EI}\,m\,\frac{l}{6}\,162\,\frac{l^3}{36^2 \cdot 6EI} = 2\,673\,mq\,\frac{l^8}{36^4 \cdot 6^2(EI)^2}.$$

Valoarea totală a deplasării v_3^{II} este suma:

$$v_3^{II} = (2 \cdot 650 + 2 \cdot 1\,886 + 2\,673) \cdot \frac{m \cdot ql^8}{36^4 \cdot 6^2\,(EI)^2} = 7\,745\,\frac{mql^8}{36^4 \cdot 6^2\,(EI)^2}.$$

Valoarea frecvenței se calculează cu ajutorul formulei (84):

$$\varphi_{II} = \sqrt{\frac{v_3^I}{v_3^{II}}} = \sqrt{\frac{99\,ql^4 \cdot 36^4 \cdot 6^2\,(EI)^2}{EI \cdot 36^2 \cdot 6 \cdot 7\,745 \cdot mql^8}} = \frac{9{,}72}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Frecvența oscilațiilor grinzii determinată în a doua aproximație diferă de valoarea exactă:

$$\varphi = \frac{9{,}87}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

numai cu — 1,5%, ceea ce se poate considera admisibil.

C — *OSCILAȚIILE PROPRII ALE GRINZILOR CU ZABRELE*

§ 17 Ecuațiile fundamentale pentru calculul frecvențelor

O grindă cu zăbrele oarecare reprezintă un sistem cu un număr infinit de grade de libertate. Fiecare bară a grinzii are oscilații proprii față de axa sa și oscilează de asemenea împreună cu întreaga grindă. Calculele și experiențele au arătat că oscilațiile barelor în raport cu axele lor sunt puțin importante față de oscilațiile întregii grinzi.

Această circumstanță ne permite să neglijăm oscilațiile barelor însăși, considerând că barele rămân drepte în decursul vibrațiilor grinzii. Pornind dela această ipoteză, putem admite că masa fiecărei bare se repartizează egal la nodurile grinzii de care bara este legată, adică *masele tuturor barelor sunt concentrate la noduri.* In această ipoteză, grinda cu zăbrele poate fi considerată ca un sistem de puncte materiale (noduri), legate între ele prin eforturi axiale; în aceste puncte materiale sunt aplicate greutatea proprie a grinzii precum și încărcarea care acționează asupra grinzii.

Deplasarea totală a fiecăruia din aceste puncte se determină prin deplasările după direcția ambelor axe. Astfel, numărul infinit de grade de libertate se reduce la un număr de grade egal cu numărul dublu de noduri ale grinzii, mai puțin numărul legăturilor de reazim; deplasările la reazime depind de condițiile de mobilitate.

In cursul oscilațiilor, vor acționa asupra fiecărui nod al grinzii următoarele eforturi:

Scanned with OKEN Scanner

1) încărcarea statică din noduri și eforturile statice din barele grinzii produse de încărcarea dată; aceste forțe se echilibrează reciproc, prin urmare nu trebue să intre în ecuația echilibrului dinamic;

2) forța de inerție, caracterizată prin componentele după axa orizontală $-m\frac{d^2x}{dt^2}$ și verticală $-m\frac{d^2y}{dt^2}$;

3) eforturile din bare provocate de forțele de inerție.

Introducem următoarele notații;

m_i — masa nodului i inclusiv jumătățile maselor barelor convergente în acest nod, precum și masa sarcinilor aplicate la nod.

N_{ik} — efortul în bara care unește nodurile i și k, provenit din cauza deplasării relative a nodurilor la oscilațiile grinzii;

S_{ik} — lungimea barei care unește nodurile i și k;

α_{ik} — unghiul de înclinare al barei ik în raport cu axa orizontală;

x_{ik} și y_{ik} — componentele orizontale și verticale ale deplasării nodului.

Aceste elemente ne permit să compunem pentru fiecare nod două ecuații de echilibru dinamic:

$$\left.\begin{aligned} -m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}-\sum_n N_{ik}\cos\alpha_{ik}=0;\\ -m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}-\sum_n N_{ik}\sin\alpha_{ik}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (85)$$

Sumele din aceste formule se extind asupra tuturor barelor în număr de n, convergente în nodul i.

Pentru fiecare nod al grinzii, — în afară de nodurile de reazim, — se pot compune cele două ecuații indicate mai sus; afară de aceasta pentru nodul reazimului mobil, ținând seama de direcția deplasării, se poate scrie una din ecuațiile (85).

In ecuațiile (85) necunoscutele sunt eforturile N_{ik} și deplasările x_i și y_i. De aceea rezolvarea sistemului de ecuații de tipul (85) este posibilă atunci când efortul N_{ik} va fi exprimat prin deplasările x_i și y_i.

Valoarea efortului N_{ik} din bară poate fi exprimată prin lungirea ΔS_{ik} a barei, care la rândul ei poate fi exprimată prin valorile deplasărilor nodurilor k și i (fig. 41) cu ajutorul următoarei formule:

$$N_{ik}=\frac{EF_{ik}}{S_{ik}}[(x_k-x_i)\cos\alpha_{ik}+(y_k-y_i)\sin\alpha_{ik}]$$

Ținând seama de aceasta, ecuațiile (85) vor fi scrise astfel;

$$\left.\begin{aligned} -m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}-\sum_n\frac{EF_{ik}}{S_{ik}}[(x_k-x_i)\cos\alpha_{ik}+(y_k-y_i)\sin\alpha_{ik}]\cos\alpha_{ik}=0\\ -m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}-\sum_n\frac{EF_{ik}}{S_{ik}}[(x_k-x_i)\sin\alpha_{ik}+(y_k-y_i)\cos\alpha_{ik}]\sin\alpha_{ik}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (86)$$

Rezolvarea acestui sistem de ecuaţii liniare diferenţiale pentru deplasările mici x_i şi y_i poate fi obţinută sub următoarea formă;

$$\left.\begin{aligned} x_i &= u_i \sin(\varphi t + \nu); \\ y_i &= v_i \sin(\varphi t + \nu); \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

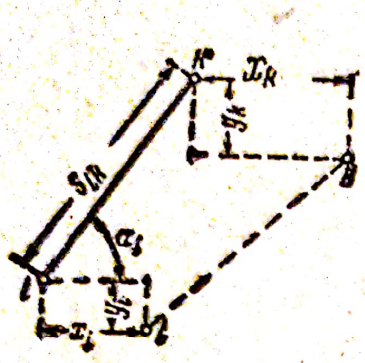


Fig. 41

După substituirea acestor expresii precum şi a derivatelor lor de ordinul al doilea

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = -u_i \varphi^2 \sin(\varphi t + \nu)$$

şi

$$\frac{d^2y_i}{dt^2} = -v_i \varphi^2 \sin(\varphi t + \nu)$$

în ecuaţia (86) şi efectuând transformări simple, obţinem următorul sistem de ecuaţii algebrice

$$\left.\begin{aligned} m_i u_i \varphi^2 - \sum_n \frac{EF_{ik}}{S_{ik}} [(u_k - u_i)\cos\alpha_{ik} + (v_k - v_i)\sin\alpha_{ik}]\cos\alpha_{ik} = 0; \\ m_i v_i \varphi^2 - \sum_n \frac{EF_{ik}}{S_{ik}} [(u_k - u_i)\sin\alpha_{ik} + (v_k - v_i)\cos\alpha_{ik}]\sin\alpha_{ik} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

Condiţiile de anulare a necunoscutelor u şi v, care intră în acest sistem de ecuaţii, sunt date de anularea determinantului coeficienţilor necunoscutelor. Rezolvarea unui asemenea determinant în raport cu φ^2 este practic imposibilă, chiar pentru grinzile cu zăbrele la care numărul nodurilor este mai mare decât trei. Aceasta ne obligă să folosim pentru determinarea frecvenţei oscilaţiilor grinzii o metodă aproximativă.

§ 18. Metode aproximative pentru determinarea frecvenţelor

Metodele aproximative de calcul a frecvenţelor oscilaţiilor libere ale grinzilor cu zăbrele sunt, în fond, aceleaşi ca şi pentru sistemele cu secţiune plină (§ 13—16) şi diferă numai prin particularităţile în determinarea deplasărilor. Calculul deplasărilor la grinzile cu zăbrele reprezintă o muncă foarte laborioasă. De aceea la analizarea particularităţilor de aplicare a metodelor aproximative de calcul a oscilaţiilor grinzilor cu zăbrele se face o apreciere comparativă din punct de vedere al preciziei şi al dificultăţii calculelor.

1. Metoda energetică

Principiul metodei energetice a fost analizat în § 14. La baza acestei metode se găseşte condiţia ca suma energiei cinetice şi a celei potenţiale în oricare moment al oscilaţiei să fie constantă.

Considerând o grindă cu zăbrele ca un ansamblu de puncte materiale cu masele m_i concentrate în noduri, energia cinetică a grinzii poate fi exprimată prin următoarea formulă:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\dot{x}_i^2(t) + \dot{y}_i^2(t)\right], \tag{89}$$

In această expresie $\dot{x}_i(t)$ și $\dot{y}_i(t)$ sunt vitesele deplasărilor orizontale și verticale ale nodului i, care pot fi exprimate prin amplitudinile u_i și v_i.

Având în vedere că

$$x_i(t) = u_i \sin(\varphi t + \nu)$$
$$y_i(t) = v_i \sin(\varphi t + \nu)$$

obținem:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \varphi u_i \cos(\varphi t + \nu) \\ \dot{y}_i(t) &= \varphi v_i \cos(\varphi t + \nu) \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Valoarea maximă a energiei cinetice va avea loc pentru $\cos(\varphi t + \nu) = 1$. Substituind valorile (90) în expresia (89) obținem:

$$V = \frac{1}{2}\varphi^2 \sum_{i=1}^{n} m_i (u_i^2 + v_i^2) \tag{91}$$

Valoarea maximă a energiei potențiale a grinzii poate fi exprimată prin lucrul mecanic al forțelor exterioare

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i g v_i \tag{92}$$

Sub semnul sumei se includ atât încărcările $m_i g$ din greutatea proprie, cât și forțele concentrate $P = mg$, aplicate la noduri. Se presupune că ambele categorii de forțe acționează vertical, deci ele produc lucru mecanic numai pe deplasările verticale.

Egalând valorile energiei (91) cu (92) obținem

$$\varphi^2 \sum_{i=1}^{n} m_i (u_i^2 + v_i^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i g v_i,$$

din care se determină frecvența oscilațiilor proprii:

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g v_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i (u_i^2 + v_i^2)}. \tag{93}$$

Lucrul mecanic al forțelor exterioare care intră în numărătorul formulei, poate fi înlocuit cu expresia energiei potențiale a eforturilor interioare:

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{N_i^2 S_i}{EF_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i (u_i^2 + v_i^2)}. \tag{94}$$

Scanned with OKEN Scanner

In această expresie N_i, S_i și F_i sunt respectiv: efortul, lungimea și secțiunea transversală a fiecărei bare a grinzii.

Calculul frecvențelor după formulele (93) și (94) este legat de determinarea deplasărilor u_i și v_i, provenite din amplitudine. Determinarea lor se face prin aproximații succesive, așa cum s'a procedat la calculul grinzilor prin metoda energetică. In acest scop, grinda cu zăbrele se încarcă cu o astfel de sarcină la care se poate prevedea că forma deformației grinzii va corespunde cu forma de deformație dinamică la prima frecvență a oscilațiilor proprii.

De obiceiu, se alege o încărcare statică constituind încărcarea inițială și cu aceste sarcini se calculează cu metodele staticii construcțiilor (a se vedea Statica Construcțiilor vol. I) deplasările u și v precum și eforturile N.

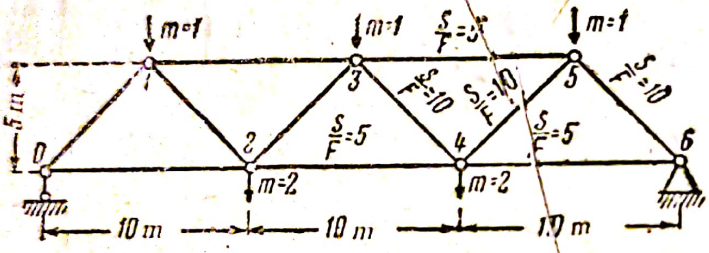


Fig. 42

Calculul se simplifică simțitor dacă se renunță la deplasările orizontale u, în care caz formula (93) se transformă astfel:

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g v_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2} \qquad (95)$$

Experiența dedusă din calculele efectuate, a arătat că eroarea la valorile frecvențelor obținute, neglijând aceste deplasări orizontale, este destul de mică.

De exemplu, frecvența calculată după formula (93) pentru o grindă cu zăbrele sistem triunghiular, de 14,75 m deschidere cu tălpi paralele, este[1]

$$\varphi = \sqrt{\frac{1272 \cdot 10^4}{(761{,}7 - 28{,}1)}} = 127 \text{ sec}^{-1}$$

Dacă se neglijează influența deplasării u, atunci frecvența oscilațiilor proprii a aceleiași grinzi, determinată prin formula (95) va fi

$$\varphi = \sqrt{\frac{1\,272 \cdot 10^4}{761{,}7}} = 129 \text{ sec}^{-1}$$

ceea ce reprezintă o diferență de 1,5%[2]

O altă simplificare a calculului pentru determinarea valorilor de-

[1]) A. N. Filippov „Metode de calcul a construcțiilor supuse la vibrații" 1941, pag. 145

[2]) O valoare aproape identică este dată și în lucrarea lui F. Bleich „Construcții metalice" partea I, 1938, pag. 462.

plasărilor, se poate face prin neglijarea deformaţiilor care se produc în zăbrelele grinzii. Influenţa deformaţiei zăbrelelor asupra deplasărilor nu este mare în raport cu influenţa deformaţiei tălpilor (a se vedea „Statica Construcţiilor" partea I. § 93) în special la grinzi cu zăbrele cu tălpi paralele. Acelaş lucru rezultă şi din exemplul de mai jos.

Exemplul 9. — *Să se determine frecvenţa de oscilaţie a grinzii cu zăbrele înfăţişată în fig. 42* [1])

Tabloul 4

Bara	S Lungimea în cm	Suprafaţa secţiunii F în cm²	$\frac{S}{F}$	Eforturi din sarcinile unitare mărite de 6 ori					Efortul $\frac{Np \cdot 6}{g}$ dela toate sarcinile	Efortul mărit de $\frac{36E}{g}$ ori		
				$\overline{N}_1$	$\overline{N}_2$	$\overline{N}_3$	$\overline{N}_4$	$\overline{N}_5$		$\frac{\overline{N}_1 N_p}{F} S$	$\frac{\overline{N}_2 N_p}{F} S$	$\frac{\overline{N}_3 N_p}{F} S$
0—2	1 000	200	5	5	4	3	2	1	+21	525	420	315
2—4	1 000	200	5	3	6	9	6	3	+39	585	1 170	1 755
4—6	1 000	200	5	1	2	3	4	5	+21	105	210	315
0—1	700	140	5	—7	—5,6	—4,2	—2,8	—1,4	—31,8	1 113	890	667,8
1—3	1 000	200	5	—4	—8	—6	—4	—2	—35	700	1 400	1 050
3—5	1 000	200	5	—2	—4	—6	—8	—4	—35	350	700	1 050
5—6	700	140	5	—1,4	—2,8	—4,2	—5,6	—7,0	—31,8	222,6	445	667,5
1—2	700	70	10	—1,4	+5,6	+4,2	+2,8	+1,4	+21	—294	1 176	882
2—3	700	70	10	+1,4	+2,8	—4,2	—2,8	—1,4	—4,2	—59	—17,6	177
3—4	700	70	10	—1,4	—2,8	—4,2	+2,8	+1,4	—4,2	59	17,6	177
4—5	700	70	10	+1,4	+2,8	+4,2	+5,6	—1,4	+21	294	588	882
										3 600	6 999,8	7 933
				$\frac{1}{36 \cdot 2 \cdot 10^6} \sum \frac{\overline{N}_i N_p S}{F} \cdot \frac{1}{g} =$						$50 \cdot 10^{-6}$	$97{,}3 \cdot 10^{-6}$	$110{,}3 \cdot 10^{-6}$

In tabloul 4 sunt indicate lungimile, secţiunile transversale, valorile eforturilor N_p în elementele unei grinzi cu zăbrele produse de sarcinile unitare aplicate în diferite noduri ale grinzii, precum şi eforturile din barele grinzii provenite din încărcarea dată care se calculează pentru fiecare element al grinzii după formula :

$$\frac{N_p \cdot 6}{g} = (\overline{N}_1 \cdot 1 + \overline{N}_2 \cdot 2 + \overline{N}_3 \cdot 1 + \overline{N}_4 \cdot 2 + \overline{N}_5 \cdot 1)$$

In acelaş tablou sunt trecute apoi valorile produselor :

$$\frac{\overline{N}_i N_p}{F} S \cdot \frac{36 E}{g}$$

prin a căror sumă împărţită cu $36 \cdot 2 \cdot 10^6$ se determină deformaţiile în nodurile respective micşorate de g ori,

[1]) Pentru comparaţie, grinda cu zăbrele, examinată în acest exemplu este luată din lucrarea lui K. S. Zavriev „Dinamica construcţiilor" Editura Transjeldorizdat (Căilor ferate) 1945. pag. 117.

In tabloul 5 este indicat calculul lucrului mecanic al forţelor exterioare şi al energiei cinetice.

Tabloul 5

N-rul nodului	Masa m_i	Deplasarea $v_i : g$	Lucrul mecanic al forţelor exterioare $T : g^2$	Energia cinetică $V : g^2$
1	1	$50 \cdot 10^{-6}$	$50 \cdot 10^{-6}$	$2\,500 \cdot 10^{-12}$
2	2	$97{,}3 \cdot 10^{-6}$	$195 \cdot 10^{-6}$	$18\,874 \cdot 10^{-12}$
3	1	$110{,}3 \cdot 10^{-6}$	$110 \cdot 10^{-6}$	$12\,166 \cdot 10^{-12}$
4	2	$97{,}3 \cdot 10^{-6}$	$195 \cdot 10^{-6}$	$18\,874 \cdot 10^{-12}$
5	1	$50 \cdot 10^{-6}$	$50 \cdot 10^{-6}$	$2\,500 \cdot 10^{-12}$
			$590 \cdot 10^{-6}$	$54\,914 \cdot 10^{-12}$

Frecvenţa oscilaţiilor după formula (95) este egală cu

$$\varphi = \sqrt{\frac{590 \cdot 10^6}{54\,914}} = 106{,}4 \text{ sec}^{-1}$$

Frecvenţa oscilaţiilor, calculată pentru aceiaşi grindă de către prof. K. S. Zavriev[1] este :

$$\varphi = 106 \text{ sec}^{-1}$$

iar aceea calculată de S. A. Bernstein este

$$\varphi = 0{,}167 \sqrt{E \frac{F}{S}} =$$

$$= 0{,}167 \sqrt{2 \cdot 10^6 \frac{1}{5}} = 106 \text{ sec}^{-1}$$

2. Metoda grinzilor echivalente

Această metodă constă în înlocuirea grinzii cu zăbrele cu o grindă cu secţiune plină, având rigiditate echivalentă şi determinând frecvenţa oscilaţiilor pentru grinda cu secţiune plină.

Momentul de inerţie al grinzii căutate se determină din condiţia de egalitate a deformaţiilor grinzii şi a grinzii echivalente într'un punct mai caracteristic, de exemplu, în mijlocul deschiderii sau în punctul de aplicaţie al celei mai mari sarcini concentrate.

Deformaţia grinzii cu zăbrele în punctul k se determină, — după cum se cunoaşte, — cu ajutorul formulei

$$v_{cr} = \sum_1^n \overline{N}_k N_p \frac{S}{EF} \qquad (96)$$

Deformaţia grinzii este în funcţie de momentul de inerţie

$$v_{cr} = f\left(\frac{1}{I}\right)$$

[1] K. S. Zavriev „Dinamica construcţiilor" 1946, pag. 120.

Scanned with OKEN Scanner

Egalând ambele expresii ale deformațiilor, obținem valoarea momentului de inerție a grinzii echivalente.

Dacă considerăm că greutatea proprie a grinzii este uniform distribuită pe toată lungimea ei, atunci deformația la mijlocul deschiderii grinzii echivalente se determină prin formula

$$v_{cr} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI} \tag{97}$$

Egalând expresiile (96) și (97), obținem

$$\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI} = \sum_1^n \overline{N}_k N_p \frac{S}{EF},$$

de unde

$$I = \frac{5}{384 E}\frac{ql^4}{\sum_1^n \overline{N}_k N_p \frac{S}{EF}} \tag{98}$$

Cunoscând momentul de inerție al grinzii echivalente, se poate determina frecvența oscilațiilor cu ajutorul formulelor deduse în paragrafele precedente.

De exemplu, pentru o grindă simplu rezemată, frecvența primei semi-unde se determină prin formula (a se vedea problema 16).

$$\varphi = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Substituind în această formulă valorile lui I (98) și $m = \frac{q}{g}$, obținem

$$\varphi = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{5 \cdot Eql^4 \cdot g}{384 Eq \sum_1^n \frac{\overline{N}_k N_p}{EF} S}} = 1{,}13 \cdot \sqrt{\frac{g}{\sum_1^n \frac{\overline{N}_k N_p}{EF} S}} \tag{99}$$

$$\varphi = 1{,}13\sqrt{\frac{g}{v_{cr}}}$$

Din comparațiile care urmează, se poate vedea cât de apropiate sunt rezultatele calculului frecvențelor cu acest procedeu de rezultatele obținute prin alte metode:

a) Frecvența oscilațiilor grinzii cu zăbrele, reprezentată în fig. 42, calculată după formula (99) dă valoarea

$$\varphi = 1{,}13\sqrt{\frac{g}{v_3}} = 1{,}13\sqrt{\frac{10^6 \cdot g}{110{,}3g}} = 107 \text{ sec}^{-1},$$

care diferă cu mai puțin decât 1% de frecvența obținută pentru aceeași grindă din exemplul 9

b) Pentru grinda cu zăbrele înfățișată în fig. 43, frecvența calculată cu metoda lui Polhausen și cu ajutorul formulei (99), are următoarele valori :[1]

— după Polhausen :

$$\varphi = 31{,}8 \text{ sec}^{-1}$$

— cu formula (99)

$$\varphi = 31{,}9 \text{ sec}^{-1}$$

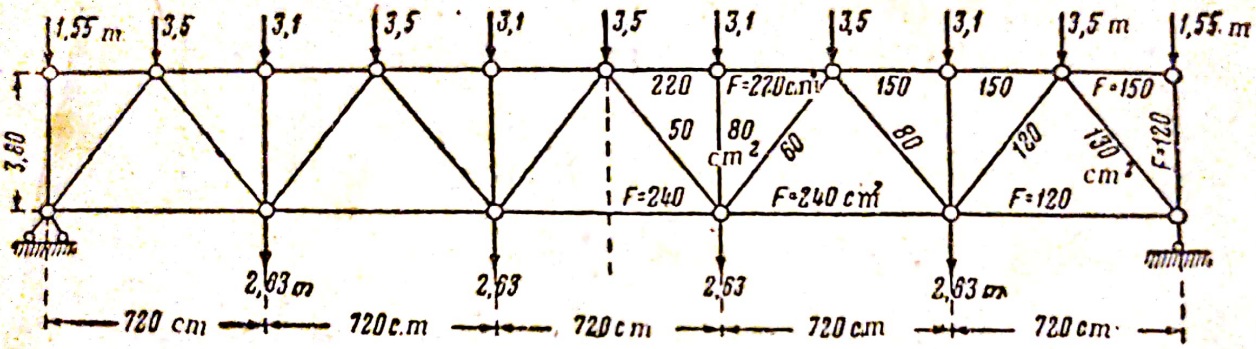


Fig. 43

c) Frecvența calculată pentru grinda cu zăbrele, reprezentată în fig. 44, calculată cu metoda energetică și cu formula (99) are următoarele valori[2]

— după metoda energetică

$$\varphi = 127{,}1 \text{ sec}^{-1}$$

— cu formula (99)

$$\varphi = 123{,}3 \text{ sec}^{-1}$$

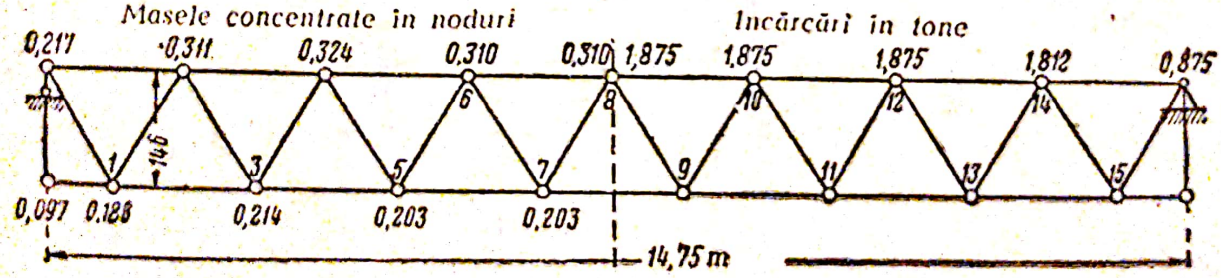


Fig. 44

Din datele de mai sus se constată că, pentru grinzi cu zăbrele cu tălpi paralele, metoda grinzilor echivalente dă rezultate deplin satisfăcătoare.

---

[1]) Datele sunt extrase din lucrarea lui S. A. Bernstein „Bazele dinamicii construcțiilor" 1941, pag. 144—147.

[2]) Datele sunt extrase din lucrarea lui A. N. Filippov „Metode pentru calculul construcțiilor la vibrații" 1941, pag. 145 și 146.

Se poate releva că, cu această metodă calculul este oarecum mai simplu decât în cazul aplicării metodei energetice, întrucât pentru determinarea momentului de inerție al grinzii echivalente, trebue să calculăm deformația numai într'un singur punct, iar nu în toate nodurile.

3. Inlocuirea maselor distribuite ale grinzilor cu zăbrele printr'o masă concentrată și cu mase reduse la talpa de încărcare

Posibilitățile și avantajele aplicării acestei metode la determinarea frecvențelor grinzii au fost expuse în § 16. Posibilitățile de aplicare a lor în același scop pentru calculul grinzilor cu zăbrele, se bazează pe metoda expusă mai sus de echivalare a grinzii cu zăbrele cu o grindă cu secțiune plină.

Vom lămuri acest procedeu prin câteva exemple.

Să determinăm frecvența oscilațiilor libere ale grinzii cu zăbrele, reprezentată în fig. 43.

Concentrăm la mijlocul grinzii jumătatea întregii mase transmisă grinzii; a doua jumătate a masei o considerăm transmisă la reazimele grinzii.

Conform fig. 43 avem

$$M = \frac{1}{g}\left(1\,550 + 2 \cdot 3\,500 + 2 \cdot 3\,100 + \frac{1}{2}3\,500 + 2 \cdot 2\,630\right) =$$

$$= \frac{21\,760}{981} = 22{,}18\,\frac{kg \cdot \sec^2}{cm}.$$

Frecvența oscilațiilor libere ale unei grinzi cu masa concentrată, se exprimă prin formula

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{1}{M\delta_{11}}} \qquad (100)$$

în care δ_{11} este deformația la mijlocul deschiderii grinzii, datorită sarcinii unitare.

Această deformație are următoarea valoare[1])

$$\delta_{11} = \frac{96}{2{,}15.10^6} = 44{,}7 \cdot 10^{-6}\ \text{cm}$$

Pe baza formulei (100) obținem

$$\varphi = \sqrt{\frac{10^6}{22{,}18 \cdot 44{,}7}} = 31{,}7\ \sec^{-1},$$

ceea ce coincide cu valoarea frecvenței obținută pentru același grindă cu zăbrele în partea a doua a acestui paragraf.

Să determinăm cu același metodă frecvența grinzii cu zăbrele, înfățișată în fig. 42.

---

[1]) A se vedea S. M. Bleich „Teoria și calculul podurilor metalice" 1931 § 19. Tabloul 1.

Conform cu distribuţia dată a maselor, masa concentrată în nodul dela mijloc 3, este ;

$$M = \frac{1}{2}(3 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = 3{,}5$$

Deformaţia produsă de o forţă unitară, aplicată în nodul dela mijlocul grinzii, determinată prin formulă este :

$$\delta_{33} = \sum_{1}^{n} \frac{\overline{N}_3^2}{EF} S ,$$

şi pentru calcul folosim datele din coloana a şaptea a tabloului 4.

După aceste date

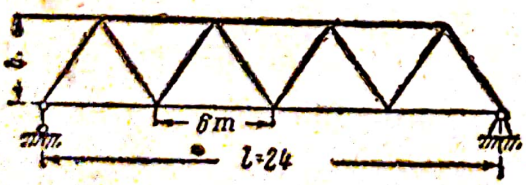
$$\delta_{33} = \frac{1}{36 \cdot 2 \cdot 10^6}(2 \cdot 3^2 \cdot 5 + 9^2 \cdot 5 + 2 \cdot 4{,}2^2 \cdot 5 + 2 \cdot 6^2 \cdot 5 + 4 \cdot 4{,}2^2 \cdot 10) = 24{,}1 \cdot 10^{-6}$$

Calculăm frecvenţa cu ajutorul formulei (100) şi obţinem ;

$$\varphi = \sqrt{\frac{10^6}{3{,}5 \cdot 24{,}1}} = 108 \text{ sec}^{-1}$$

Valoarea obţinută a frecvenţei diferă cu 1;9% de valoarea frecvenţelor calculate pentru aceeaşi grindă în exemplul 9.

Procedeul expus de transformare a masei distribuite a grinzii cu zăbrele într'o singură masă concentrată, asigură o precizie suficientă a calculului frecvenţei oscilaţiilor cu o singură semi-undă. Această simplificare însă nu mai este aplicabilă în cazurile când trebuesc calculate frecvenţele pentru oscilaţii proprii cu două sau trei semi-unde. Insă în aceste cazuri nu ne mai putem reîntoarce la metoda exactă (§ 17) de distribuire a maselor barelor grinzii la toate nodurile din cauza complicaţiilor de neînvins în efectuarea calculelor.



Fig, 45

Operaţia de determinare a eforturilor produse de sarcini oscilatorii în barele grinzilor cu zăbrele şi care sarcini sunt în general, aşezate pe lungimea tălpii de încărcare, implică raportarea tuturor maselor la nodurile acestei tălpi.

Pentru a clarifica procedeul după care se poate renunţa la raportarea maselor barelor la toate nodurile — raportându-le numai la una din tălpile grinzii, — vom efectua calculul frecvenţelor oscilaţiilor proprii ale grinzii (fig. 45) în condiţiile de distribuire a maselor barelor după cele patru variante indicate în schema din fig. 46.

Considerăm că masa fiecărei bare este egală cu m şi distribuind masele tuturor barelor la toate nodurile, obţinem schema din fig. 46 a.

Trecerea dela această schemă la aceea reprezentată în fig. 46 b. s'a realizat printr'o simplă ridicare a maselor de pe nodurile tălpii inferioare şi aşezarea lor în nodurile tălpii superioare. Trecerea la schema

înfățișată în fig. 46 c, s'a făcut prin transferarea maselor dela nodurile tălpii superioare ale schemei reprezentate în fig. 46 a, la nodurile tălpii inferioare. In schema din fig. 46 d, toate masele sunt raportate numai la nodul dela mijloc și la cele dela reazim.

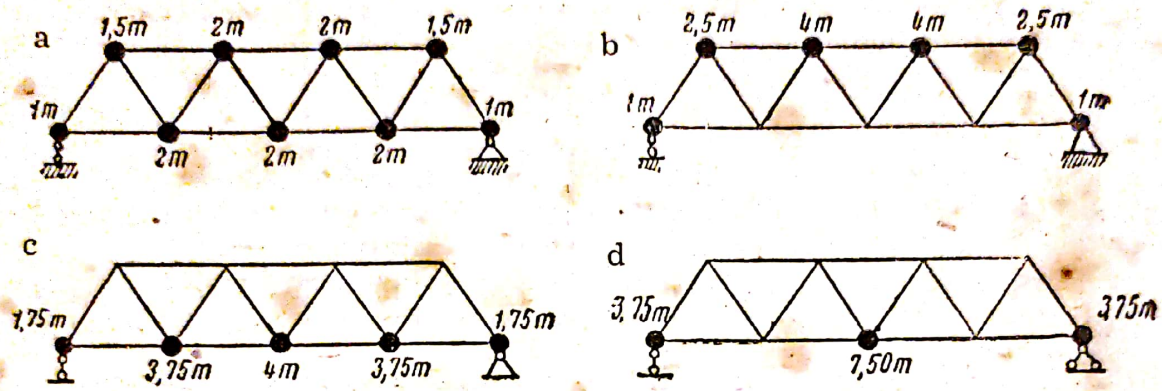


Fig. 46

Calculele efectuate[1] pentru aceste patru cazuri de distribuire a maselor ne dau următoarele valori ale frecvenței minime a oscilațiilor proprii:

La distribuirea maselor după schema fig. 46 *a* ... $\varphi = 0{,}1040\sqrt{EF:m}$
„ „ „ „ fig. 46 *b* ... $\varphi = 0{,}1082\sqrt{EF:m}$
„ „ „ „ fig, 46 *c* ... $\varphi = 0{,}1002\sqrt{EF:m}$
„ „ „ „ fig. 46 *d* ... $\varphi = 0{,}0973\sqrt{EF:m}$

Pe baza acestor rezultate se poate trage concluzia că frecvența minimă a oscilațiilor libere ale unei grinzi cu zăbrele cu masele raportate la toate nodurile (fig. 46 a) diferă foarte puțin de valoarea frecvenței calculată pentru masele raportate numai la nodurile unei singure tălpi (fig. 46 b, c și d).

Frecvența oscilațiilor proprii ale grinzii variază foarte puțin și în cazul când masele barelor se repartizează în mod egal la nodurile tălpii, în afară de cele de reazim; de exemplu atunci când schema reprezentată în fig. 46 c este înlocuită cu o schemă care are în nodurile tălpii inferioare câte o masă de 4 *t* și la nodurile de reazim câte 1,5 *t*.

Cele expuse mai sus, ne permit să tragem concluzia că determinarea frecvențelor oscilațiilor libere ale unei grinzi cu zăbrele se poate face prin raportarea maselor tuturor barelor în nodurile tălpii de încărcare, precum și prin împărțirea egală a maselor la toate nodurile.

[1]) Rezultatele indicate în acest paragraf sunt extrase din teza de doctorat a aspirantului MIIT V. I. Sablin, 1948.

4. Metoda aproximațiilor succesive

Se pot indica două procedee de calcul a frecvențelor oscilațiilor libere ale unei grinzi cu zăbrele.

Unul din aceste procedee, propus de Polhausen,[1] este legat de determinarea deplasărilor, verticale și orizontale ale tuturor nodurilor grinzii cu zăbrele, din care cauză este necesar ori să se construiască două sau trei diagrame Williot, ori să se efectueze calculele analitice ale acestor deplasări. Atât prima, cât și a doua operație pentru calculul deplasărilor, este destul de laborioasă. Insă exactitatea rezultatelor obținute pentru grinzile cu zăbrele cu tălpi paralele este aceeași ca și la procedeul de a asimila o grindă cu zăbrele cu o grindă cu secțiune plină, sau la metoda de înlocuire a sarcinilor distribuite prin mase concentrate (a se vedea pt. 2 și 3 din acest paragraf).

Față de cele expuse mai sus, considerăm că nu este câtuși de puțin indicat să expunem acest procedeu și să-l recomandăm pentru calcul.

Al doilea procedeu de calcul, cu metoda aproximațiilor succesive, a frecvențelor oscilațiilor libere ale grinzilor cu zăbrele constă în extinderea asupra acestor grinzi a procedeului expus în § 16.

Aplicarea acestui procedeu impune să se calculeze deplasările verticale ale tuturor nodurilor grinzii cu zăbrele la fiecare dintre aproximațiile succesive, ceea ce conduce la calcule foarte lungi. Cu toate că aceste calcule se ușurează în oarecare măsură prin construirea liniilor de influență ale deformațiilor care se folosesc apoi pentru toate recalculările, totuși liniile de influență ale deformațiilor trebuesc construite pentru toate nodurile grinzii, ceea ce reprezintă o operație oarecum laborioasă.

Acest procedeu al aproximațiilor succesive poate să fie recomandat dacă rezultatele lui ar fi mai precise decât cele obținute prin alte mijloace.

Calculele comparative arată însă că nu există o diferență prea mare între valorile obținute.

De exemplu: frecvența pentru grinda cu zăbrele, reprezentată în fig. 42, calculată prin metoda aproximațiilor succesive[2] este egală cu $-\varphi = 106\ \text{sec}^{-1}$, după procedeul grinzilor echivalente — cu $\varphi = 107\ \text{sec}^{-1}$, iar după metoda de aplicare a maselor concentrate — cu $\varphi = 108\ \text{sec}^{-1}$.

Aplicarea acestei din urmă metode poate fi recomandabilă în cazurile când la calculul maselor, toate barele grinzii se referă la nodurile tălpii de încărcare (a se vedea mai sus pt. 3). La o astfel de împărțire a maselor, grinda cu zăbrele se reduce la forma unei grinzi cu mai multe mase (a se vedea exemplul 8).

---

[1]) Metoda Polhausen este prelucrată detaliat în artico'ul lui S. N. Nichiforov „Oscilațiile construcțiilor metalice cu zăbrele" Publicațiile Școalei superioare tehnice 1931, pag. 46.

Expunerea acestei metode cu analiza amănunțită a exemplului este cuprinsă în lucrarea lui F. Bleich „Teoria și calculul podurilor metalice" 1931, § 11. De asemenea în lucrarea aceluiaș autor „Construcții metalice" 1938, § 13.

[2]) K. S. Zavriev „Dinamica construcțiilor" 1946, cap. VII.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 3

OSCILAȚIILE FORȚATE ALE UNUI SISTEM CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE

§ 19. Probleme care se ivesc la calculul sistemelor elastice sub acțiunea sarcinilor dinamice

Sub acțiunea unei încărcări, care variază în funcție de timp, forțele interioare din elementele sistemelor elastice sunt și ele în funcție de timp. Astfel, de exemplu, momentele încovoietoare, forțele normale și tăietoare într'un cadru sau grindă, vor avea valori variabile:

$$M = M(t), \quad N = N(t), \quad Q = Q(t)$$

Față de aceasta și rezistențele vor varia în funcție de timp după o lege oarecare:

$$\sigma = \sigma(t) \quad \tau = \tau(t)$$

Rezistențele dinamice maxime depind atât de amplitudinea forțelor dinamice, cât și de dimensiunile, rigiditatea elementelor construcției, tipul construcției (grindă cu inimă plină sau cu zăbrele, arc) și de mărimea masei construcției precum și a instalațiilor care sunt amenajate pe acele construcții.

In Capitolul 1 s'a arătat că, coeficientul dinamic μ, pentru un sistem cu un singur grad de libertate, depinde de raportul oscilațiilor proprii φ către frecvența ϑ a forței oscilatorii (37).

Astfel, *valoarea maximă* (amplitudinea) a eforturilor și a solicitărilor interioare depinde de asemenea de acest raport.

La sistemele cu mai multe grade de libertate *valoarea maximă* a eforturilor interioare la stabilizarea vibrațiilor, va depinde de valoarea lui ϑ.

Una din principalele probleme ale calculului dinamic este determinarea amplitudinii eforturilor și rezistențelor.

In cele ce urmează, vom analiza în primul rând forțele oscilatorii. Pentru aceasta, vom admite că toate *forțele dinamice aplicate asupra sistemului dat au una și aceeași frecvență.*

In acest caz, — după cum se arată mai jos, — momentele, forțele normale și tăietoare în toate secțiunile vor avea valoarea maximă în același moment; de aceea principala problemă constă în construirea diagramelor momentelor (din amplitudine), a forțelor tăietoare și a forțelor normale, maxime.

Pentru sistemele cu mai multe grade de libertate, întocmai ca și pentru sistemele cu un singur grad de libertate, sunt posibile cazuri

de rezonanță. Pe când într'un sistem cu un singur grad de libertate, care are oscilații cu o singură frecvență, este posibil numai un singur caz de rezonanță (fig. 14); la sistemele cu mai multe grade de libertate, care au forme de oscilații cu frecvențe diferite, sunt posibile *mai multe cazuri de rezonanță* (§ 22), care se pot produce *la coincidența valorii frecvenței* ϑ *a forței oscilatorii cu valoarea oricărei frecvențe* φ_i *a oscilațiilor proprii* (fig. 47). De aceea problema calculului dinamic este totodată și o verificare a sistemului la rezonanță.

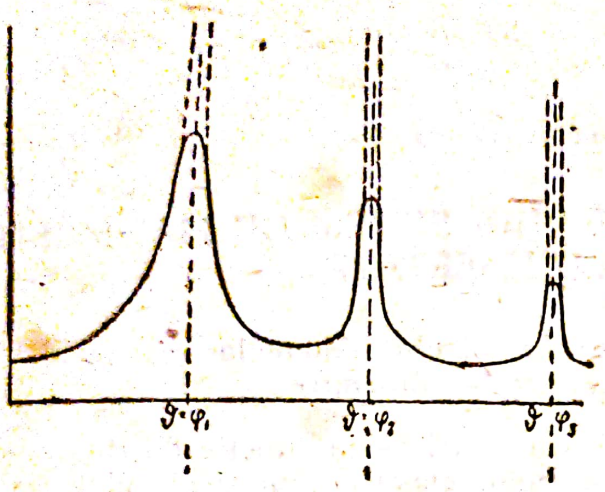


Fig. 47

Pentru verificarea la rezonanță este, în general, suficient să determinăm frecvența minimă a oscilațiilor sistemului, ceea ce se poate face cu oricare dintre procedeele expuse în paragrafele precedente.

In cazurile când solicitările dinamice diferă mult de cele statice (în cazul unui coeficient dinamic μ foarte mare), se ivește necesitatea să sporim frecvențele oscilațiilor proprii, adică să reducem raportul $\vartheta : \varphi$, ceea ce se poate obține prin reducerea rigidității elementelor, sau reducerea masei construcției și a instalațiilor, ori prin modificarea schemei construcției.

§ 20. Expresia eforturilor interioare și a deplasărilor într'un sistem elastic supus la acțiunea sarcinilor dinamice

Când asupra unei construcții acționează sarcini dinamice, în afară de oscilații proprii se produc și oscilații forțate. Insă deoarece oscilațiile proprii se sting foarte repede sub acțiunea forțelor de inerție ele pot fi neglijate și sistemul poate fi considerat numai sub acțiunea oscilațiilor forțate stabilizate.

Datorită oscilațiilor forțate ale diferitelor mase concentrate $m_1, m_2 \ldots . m_n$ ale construcției, aceasta se va găsi atât sub acțiunea directă a forțelor dinamice $P(t)$, cât și sub acțiunea forțelor de inerție, $Z_1, Z_2 \ldots . Z_n$, aplicate în punctele în care sunt concentrate masele.

Mai jos se arată că toate forțele de inerție ating valoarea maximă în același moment, deci pentru valorile maxime ale eforturilor M, N și Q vom avea următoarele expresii:

$$\left.\begin{aligned} M_k &= M_{kp} + \overline{M}_{k1} Z_1 + \overline{M}_{k2} Z_2 + \ldots + \overline{M}_{kn} Z_n ; \\ N_k &= N_{kp} + \overline{N}_{k1} Z_1 + \overline{N}_{k2} Z_2 + \ldots + \overline{N}_{kn} Z_n ; \\ Q_k &= Q_{kp} + \overline{Q}_{k1} Z_1 + \overline{Q}_{k2} Z_2 + \ldots + \overline{Q}_{kn} Z_n . \end{aligned}\right\} \qquad (101)$$

Scanned with OKEN Scanner

In aceste expresii M_{kp}, N_{kp}, Q_{kp} sunt: momentul, forţa normală respectiv forţa tăietoare, produse de acţiunea statică a forţelor dinamice la valoarea maximă;

$\overline{M}_{ki}$, $\overline{N}_{ki}$ şi $\overline{Q}_{ki}$ — momentul, forţa normală şi forţa tăietoare în sistemul dat, provocate de acţiunea lui $\overline{Z}_i = 1$.

Pentru deplasarea Δ a oricărui punct k se poate scrie:

$$\Delta_k = \Delta_{kp} + \delta_{k1} Z_1 + \delta_{k2} Z_2 + \ldots + \delta_{kn} Z_n. \qquad (102)$$

în care Δ_{kp} este deplasarea produsă de acţiunea statică a forţelor dinamice atunci când au valoarea maximă;

δ_{ki} — deplasarea provocată de acţiunea lui $\overline{Z}_i = 1$.

Prin urmare, pentru construirea diagramelor valorilor maxime ale eforturilor interioare şi a deplasărilor, este necesar să determinăm forţele de inerţie maxime necunoscute $Z_1, Z_2 \ldots . Z_n$, după care se poate considera că problema este în fond rezolvată.

§ 21. Ecuaţiile de condiţie (canonice) pentru calculul forţelor de inerţie

Dacă într'un sistem elastic se găsesc n mase concentrate şi asupra lui acţionează un grup de forţe oscilatorii: $P_1 \sin \vartheta t$, $P_2 \sin \vartheta t$, ... $P_k \sin \vartheta t$. atunci expresia deplasării oricăreia dintre mase într'un moment oarecare t se poate scrie astfel, ţinând seamă de formula (102):

$$y_i(t) = y_{ip}(t) + \delta_{i1} Z_1(t) + \delta_{i2} Z_2(t) + \ldots\ldots + \delta_{in} Z_n(t) \qquad (103).$$

Deplasarea aceluiaşi punct i, provocată de acţiunea statică a forţelor oscilatorii $y_{ip}(t)$ poate fi exprimată prin formula

$$y_{ip}(t) = \delta_{i1} P_1(t) + \delta_{i2} P_2(t) + \ldots + \delta_{ik} P_k(t) = \left[\sum_{p=1}^{k} \delta_{ip} P_p(t)\right] \sin \vartheta t = \Delta_{ip} \sin \vartheta t, \qquad (104)$$

în care Δ_{ip} este deplasarea punctului i sub acţiunea statică a forţelor dinamice la valorile lor maxime.

Valoarea acestei deplasări poate fi determinată prin metodele aplicabile pentru stabilirea deplasărilor sub acţiunea statică a sarcinilor; de exemplu, într'un sistem cu secţiune plină (fără zăbrele) cu ajutorul unei integrale de forma:

$$\Delta_{ip} = \int \frac{M_p M_i}{EI}\, ds$$

sau prin metoda de „înmulţire a diagramelor".

Forţa de inerţie Z_i se determină — după cum se cunoaşte — prin expresia

$$Z_i(t) = -m_i \ddot{y}_i \qquad (105)$$

Având în vedere că fiecare masă are oscilaţii armonice

$$y_i(t) = y_i \sin \vartheta t \qquad (106)$$

obținem:

$$\ddot{y}_i(t) = -y_i \vartheta^2 \sin \vartheta t = -y_i(t)\,\vartheta^2 \tag{107}$$

Substituind valoarea găsită în formula (105), obținem

$$Z_i(t) = m_i \vartheta^2 y_i(t).$$

Prin urmare

$$y_i(t) = \frac{1}{m_i \vartheta^2} Z_i(t) \tag{108}$$

Introducând valoarea (108) în ecuația (103) avem:

$$\delta_{i1} Z_1(t) + \delta_{i2} Z_2(t) + \ldots + \left(\delta_{ii} - \frac{1}{m_i \vartheta^2}\right) Z_i(t) \ldots \delta_{in} Z_n(t) + \\ + \Delta_{ip} \sin \vartheta t = 0.$$

Ecuația obținută este ecuația oscilațiilor masei m_i.
Asemenea ecuații pot fi scrise pentru toate masele.
Notând cu

$$\delta^*_{ii} = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \vartheta^2} \tag{109}$$

unde

$$i = 1, 2 \ldots, n.$$

Obținem următorul sistem de ecuații:

$$\left.\begin{array}{l} Z_1(t)\,\delta^*_{11} + Z_2(t)\,\delta_{12} + Z_3(t)\,\delta_{13} + \ldots + Z_n(t)\,\delta_{1n} + \Delta_{1p} \sin \vartheta t = 0; \\ Z_1(t)\,\delta_{21} + Z_2(t)\,\delta^*_{22} + Z_3(t)\,\delta_{23} + \ldots + Z_n(t)\,\delta_{2n} + \Delta_{2p} \sin \vartheta t = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_1(t)\,\delta_{n1} \quad Z_2(t)\,\delta_{n2} + Z_3(t)\,\delta_{n3} + \ldots + Z_n(t)\,\delta^*_{nn} + \Delta_{np} \sin \vartheta t = 0. \end{array}\right\} \tag{110}$$

Din acest sistem de ecuații (110) rezultă că toate forțele de inerție necunoscute $Z_i(t)$ sunt funcții periodice:

$$Z_i(t) = Z_i \sin \vartheta t,$$

care ating simultan valoarea maximă atunci când $\sin \vartheta t = 1$. Așa dar, punând problema găsirii amplitudinii forțelor de inerție $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$, sistemul de ecuații (110) trebue să fie scris sub forma următoare:

$$\left.\begin{array}{l} Z_1\delta^*_{11} + Z_2\delta_{12} + Z_3\,\delta_{13} + \ldots + Z_n\,\delta_{1n} + \Delta_{1p} = 0; \\ Z_1\,\delta_{21} + Z_2\delta^*_{22} + Z_3\,\delta_{23} + \ldots + Z_n\,\delta_{2n} + \Delta_{2n} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_1\,\delta_{n1} + Z_2\,\delta_{n2} + Z_3\,\delta_{n3} + \ldots + Z_n\,\delta^*_{nn} + \Delta_{np} = 0. \end{array}\right\} \tag{111}$$

Sistemul de ecuații (111) după forma sa exterioară este similar cu ecuațiile de condiție (canonice) ale metodei forțelor. Diferența

Scanned with OKEN Scanner

constă numai în faptul că deformaţiile principale δ_{ii}^{*} aşezate pe diagonale, se determină prin formulele:

$$\delta_{11}^{*} = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \vartheta^2}$$

$$\delta_{22}^{*} = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \vartheta^2} \text{ etc.}$$

Pe baza celor expuse mai sus, putem să scriem expresia (101) a oricărui efort interior $S(t)$ la un moment oarecare;

$$S(t) = S_p(t) + \overline{S}_1 Z_1(t) + \overline{S}_2 Z_2(t) + \ldots + \overline{S}_n Z_n(t) =$$

$$= S_p \sin \vartheta t + \overline{S}_1 Z_1 \sin \vartheta t + \ldots + \overline{S}_n Z_n \sin \vartheta t = S \sin \vartheta t.$$

Astfel, valoarea maximă a oricărui factor interior va fi atunci când $\sin \vartheta t = 1$. Prin aceasta se probează exactitatea formulei (101).

Ecuaţiile de condiţie (111) sunt valabile pentru orice sistem (grinzi cu inimă plină, cadre, grinzi cu zăbrele), indiferent dacă sistemul este sau nu static determinat. Diferenţa constă în modul de calcul a valorii deplasărilor δ_{ik} şi Δ_{ip}. Pentru calculul sistemelor static nedeterminate trebuesc stabilite toate eforturile S_p, $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2 \ldots \overline{S}_n$, sau să se construiască diagramele lor în sistemul iniţial (iar nu în cel de calcul).

Pentru aceasta este necesar să calculăm acest sistem la acţiunea încărcării şi la acţiunea sarcinilor unitare, în care scop se poate folosi metoda obişnuită a forţelor, sau aceea a deformaţiilor (deplasărilor).

§ 22. Posibilităţile de producere a mai multor rezonanţe

Pentru ca să stabilim posibilităţile de producere a mai multor rezonanţe în sistemele cu câteva grade de libertate, când există câteva frecvenţe ale oscilaţiilor proprii, se recomandă folosirea determinanţilor.

Fiecare necunoscuta Z_i din ecuaţia (111) poate fi reprezentată sub următoarea formă;

$$Z_i = -\frac{D_i}{D} \tag{112}$$

în care D este determinantul format din coeficienţii de pe lângă necunoscute:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11}^{*} & \delta_{12} \ldots \delta_{1i} \ldots \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22}^{*} \ldots \delta_{2i} \ldots \delta_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} \ldots \delta_{ni} \ldots \delta_{nn}^{*} \end{vmatrix} \tag{113}$$

şi D_i este determinantul obţinut din determinantul general (113) prin înlocuirea coloanei i prin coloana compusă din coeficienţii de încărcare.

Scanned with OKEN Scanner

$$D_1 = \begin{vmatrix} \delta_{11}^* & \delta_{12} \ldots \Delta\delta_{1p} \ldots \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22}^* \ldots \Delta\delta_{2p} \ldots \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} \ldots \Delta_{np} \ldots \delta_{nn}^* \end{vmatrix} \qquad (114)$$

Dacă din elementele fiecărei coloane a determinantului (113) scoatem pe $m_i^1 \vartheta^2$ ca factor, obţinem

$$D = \frac{1}{m_1 m_2 \ldots m_n \vartheta^{2n}} \begin{vmatrix} (\delta_{11} m_1 \vartheta^2 - 1) & \delta_{12} m_2 \vartheta^2 \ldots\ldots & \delta_{1n} m_n \vartheta^2 \\ \delta_{21} m_1 \vartheta^2 & (\delta_{22} m_2 \vartheta^2 - 1) \ldots\ldots & \delta_{2n} m_n \vartheta^2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \delta_{n1} m_1 \vartheta^2 & \delta_{n2} m_2 \vartheta^2 \ldots & (\delta_{nn} m_n \vartheta^2 - 1) \end{vmatrix} \qquad (115)$$

Se poate observa uşor că, în cazul când frecvenţa forţei oscilatorii coincide cu frecvenţa oscilaţiilor proprii, determinantul D devine nul, întrucât înlocuind $\vartheta = \varphi$ determinantul sub forma (115) va reprezenta determinantul ecuaţiei seculare.

Astfel, dacă $\vartheta = \varphi_1$; $\vartheta = \varphi_2$; ..... $\vartheta = \varphi_n$, forţele de inerţie Z_1, Z_2 ..... Z_n, devin infinite. Prin urmare, *atunci când frecvenţa forţei oscilatorii se apropie de o anumită valoare a frecvenţei proprii, eforturile cresc indefinit, ceea ce indică apariţia fenomenului de rezonanţă.*

Variaţia oricărui efort interior S_k (sau a coeficientului dinamic) poate fi reprezentată printr'o diagramă, care este înfăţişată în fig. 47. Dacă s'ar fi ţinut seama de forţele rezistente, atunci, întocmai ca şi într'un sistem cu un singur grad de libertate, în momentul rezonanţei, amplitudinile oscilaţiilor nu ar fi crescut indefinit; curba respectivă este reprezentată în fig. 47.

A. *CALCULUL DINAMIC AL GRINZILOR SI CADRELOR*

§ 23. Construirea diagramelor momentelor dinamice, fără a ţine seama de greutatea proprie

Ordinea de construire a diagramelor momentelor dinamice este similară cu construirea diagramelor cu metoda forţelor în sistemele static nedeterminate.

Momentul într'un punct oarecare k se determină prin expresia:

$$M_k = M_{kp} + \overline{M}_{k1} Z_1 + \overline{M}_{k2} Z_2 + \ldots\ldots + \overline{M}_{kn} Z_n \qquad (116)$$

în care M_{kp} este momentul în sistemul dat, provocat de acţiunea statică a forţelor egale cu valoarea amplitudinilor forţelor dinamice;

$\overline{M}_{ki}$ — momentul în sistemul considerat produs de forţa $Z_i = 1$, acţionând în punctul de aplicaţie al masei m_i.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, pentru construirea diagramei lui M este necesar:

1) să se construiască toate diagramele unitare ale momentelor,

2) să se construiască diagrama de încărcare M_p provenită din acţiunea amplitudinilor sarcinilor oscilatorii,

3) să se calculeze deplasările auxiliare δ_{im} şi cele principale δ^*_{il}

4) să se rezolve ecuaţiile de condiţie (111) în raport cu Z_1, Z_2, ... Z_n.

5) folosind egalitatea (116), să se calculeze momentele în toate punctele şi să se construiască diagrama momentelor dinamice.

La calculul deplasărilor principale trebue să se ţină seama de particularitatea expresiei lor (109)

$$\delta^*_{il} = \delta_{il} - \frac{1}{m_i \vartheta^2} \qquad (117)$$

Această expresie conţine relaţia între forţele de inerţie şi frecvenţa forţelor oscilatorii ϑ.

Astfel, pentru fiecare frecvenţă ϑ va exista o diagramă proprie a momentelor dinamice. Cu cât frecvenţa este mai mare, cu atât diagrama momentelor dinamice diferă mai pronunţat de diagrama încărcării statice respective.

Pentru lămurirea problemei vom examina câteva exemple.

1. **Bara dreaptă.** Să examinăm o grindă fără greutate cu două mase concentrate m, care se găseşte sub acţiunea unei încărcări uniform repartizate cu intensitatea $p(t) = p \sin \vartheta t$ (fig. 48 a).

In fig. 48 b şi c, sunt reprezentate diagramele momentelor $\overline{M}_1$ şi $\overline{M}_2$ provenite din acţiunea forţelor unitare $\overline{Z}_1$ şi $\overline{Z}_2$ precum şi diagrama de încărcare a momentelor M_p. Folosind metoda de înmulţire a diagramelor, calculăm deplasările:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4l^3}{243\,EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7l^3}{486\,EI}$$

Introducând notaţia $\vartheta = k\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$ obţinem

$$\delta^*_{11} = \delta^*_{22} = \frac{4l^3}{243\,EI} - \frac{1}{m\vartheta^2} = \frac{l^3}{486\,EI}\left(8 - \frac{486}{k^2}\right)$$

Deplasările provocate de încărcare sunt egale

$$\Delta_{1p} = \Delta_{2p} = \frac{11}{2}\,\frac{ql^4}{486\,EI}$$

Substituind valorile găsite ale deplasărilor în ecuaţiile de condiţie (111), după reducere cu $\frac{l^3}{486\,EI}$, obţinem:

$$\left(8-\frac{486}{k^2}\right)Z_1+7Z_2+\frac{11}{2}ql=0;$$

$$7Z_1+\left(8-\frac{486}{k^2}\right)Z_2+\frac{11}{2}ql=0$$

Din aceste expresii determinăm forţele de inerţie

$$Z_1=Z_2=\frac{11}{2\left(\frac{486}{k^2}-15\right)}ql$$

După cum se vede, forţele de inerţie depind de valoarea

$$k=\frac{\vartheta}{\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}}$$

Pentru uşurarea calculelor, exprimăm valoarea lui k prin raportul $\vartheta:\varphi$. Intrucât pentru grinda considerată, frecvenţa oscilaţiilor proprii[1] este

$$\varphi=5{,}69\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

atunci

$$\beta=\frac{\vartheta}{\varphi}=\frac{k\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}}{5{,}69\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}},$$

de unde

$$k^2=(\beta\cdot 5{,}69)^2=32{,}4\ \beta^2.$$

Substituirea acestei valori în expresia forţelor de inerţie Z ne dă

$$Z_1=Z_2=\frac{11\ \beta^2}{30\ (1-\beta^2)}ql.$$

În tabloul 6 sunt date valorile amplitudinilor forţelor de inerţie Z pentru diferite valori ale lui β

Tabloul 6

β	0	0,5	0,9	1	1,1	2	4	∞
$Z:ql$	0	0,123	1,55	∞	—2,12	—0,49	—0,392	—0,367

Cu valorile găsite pentru Z s'au construit în fig. 49 diagramele momentelor. Din aceste diagrame rezultă că momentele dinamice cresc repede cu mărirea raportului $\vartheta:\varphi$. Când valoarea frecvenţei ϑ de-

[1] A se vedeă S. A. Bernştein „Bazele dinamicii construcţiilor" 1941, pag. 48.

Scanned with OKEN Scanner

păşeşte prima valoare a frecvenţei oscilaţiilor proprii φ, momentele îşi schimbă semnul. La creşterea următoare a frecvenţei sarcinilor oscilatorii, momentele scad şi pentru $\beta = \infty$ aceste frecvenţe dispar aproape complet. Observăm că la rezolvarea acestor probleme a doua rezonanţă nu se mai produce. Aceasta se explică prin simetria construcţiei şi a sarcinii oscilatorii. La oscilaţii forţate vor corespunde formele deformate simetric ale axei grinzii, iar la frecvenţa a doua, axa deformată antisimetric.

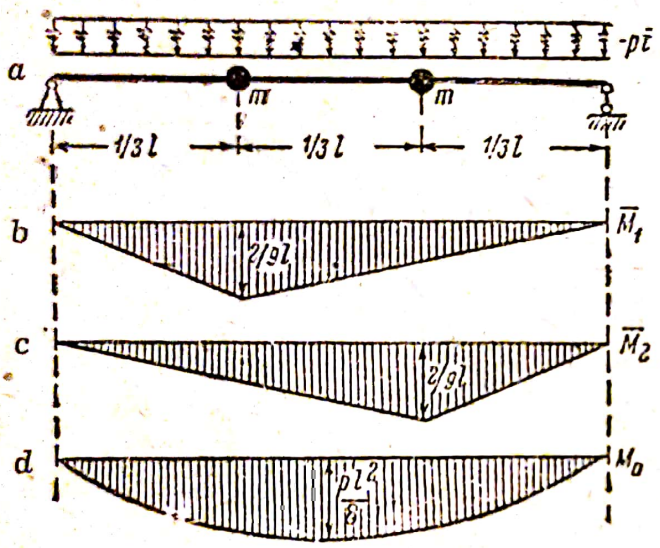


Fig. 48

2. **Bara frântă.** Să analizăm variaţia momentelor în bara frântă reprezentată în fig. 50, care se găseşte sub acţiunea unei grupe de forţe oscilatorii. Masele concentrate $m_b = m_c = m$ sunt aşezate în noduri. Greutatea proprie se neglijează.

Acest sistem este un sistem cu două grade de libertate. Pentru construirea diagramei momentelor dinamice trebue să compunem şi să rezolvăm două ecuaţii de condiţie.

La rezolvarea problemei, o importanţă foarte mare o are alegerea judicioasă a direcţiilor, după care se produc deplasările independente ale maselor. Masa aplicată în nodul B, poate să se deplaseze numai în

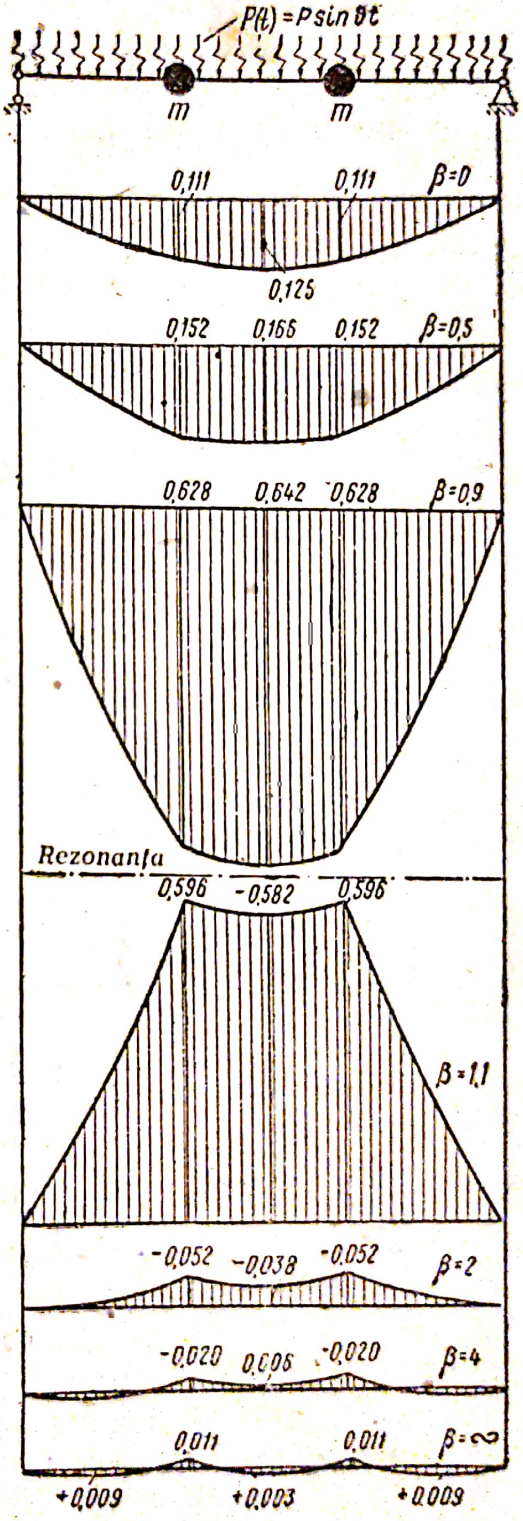


Fig. 49

direcția perpendiculară pe bara AB. De aceea prima forță unitară $Z_1 = 1$, care servește pentru construirea diagramei unitare $\overline{M}_1$ trebue să fie aplicată în nodul B, perpendicular pe bara AB.

Pentru ca să alegem în mod judicios direcția de deplasare a masei m_c, aplicată în nodul C, este necesar ca deplasările în direcția perpendiculară pe direcția aleasă a deplasării masei m_b, să fie egale cu zero.

In cazul de față, direcția forței de inerție Z_2 este luată perpendicular pe bara BC.

Cu toate că la o astfel de alegere a direcției forței Z_2, deplasarea masei m_c în lungul barei BC (provocată de deplasarea masei m_b) nu este nulă, o putem totuși neglija ca un infinît mic de ordinul al doilea.

Calea indicată pentru rezolvare este în oarecare măsură destul de aproximativă. Pentru rezolvarea exactă a problemei este necesar să folosim una dintre următoarele două metode: sau la deplasarea masei m_b să ținem seama și de inerția masei m_c, în direcția barei BC, considerând prima necunoscută ca o necunoscută grupată; sau să efectuăm calculele ca pentru un sistem cu trei grade de libertate.

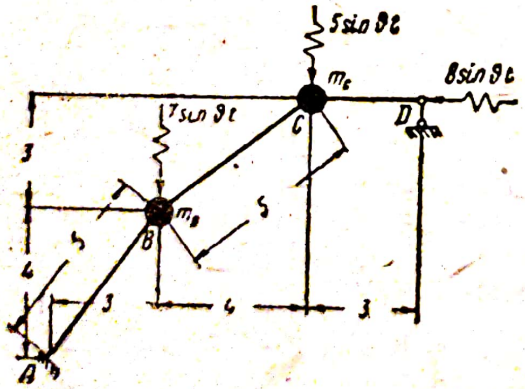


Fig. 50

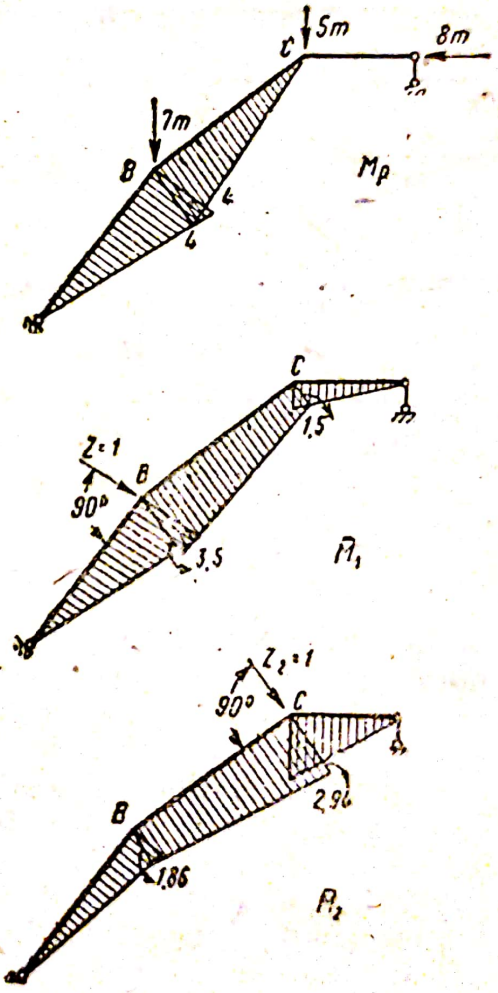


Fig. 51

Diagramele de încărcare și diagramele unitare ale momentelor pentru acest caz sunt reprezentate în fig. 51. Folosind metoda de înmulțire a diagramelor, calculăm deplasările:

$$EI\delta_{11} = 55{,}58\,; \quad EI\delta_{22} = 43{,}70\,; \quad EI\delta_{12} = 44{,}36\,;$$

$$EI\Delta_{1p} = 51{,}67\,; \quad EI\Delta_{2p} = 34{,}60.$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinăm frecvența oscilațiilor proprii ale sistemului. Ecuația seculară în cazul de față se prezintă sub forma următoare:

$$\begin{vmatrix} (55{,}58 - \lambda) & 44{,}36 \\ 44{,}36 & (43{,}70 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

în care

$$\lambda = \frac{EI}{m\,\varphi^2}$$

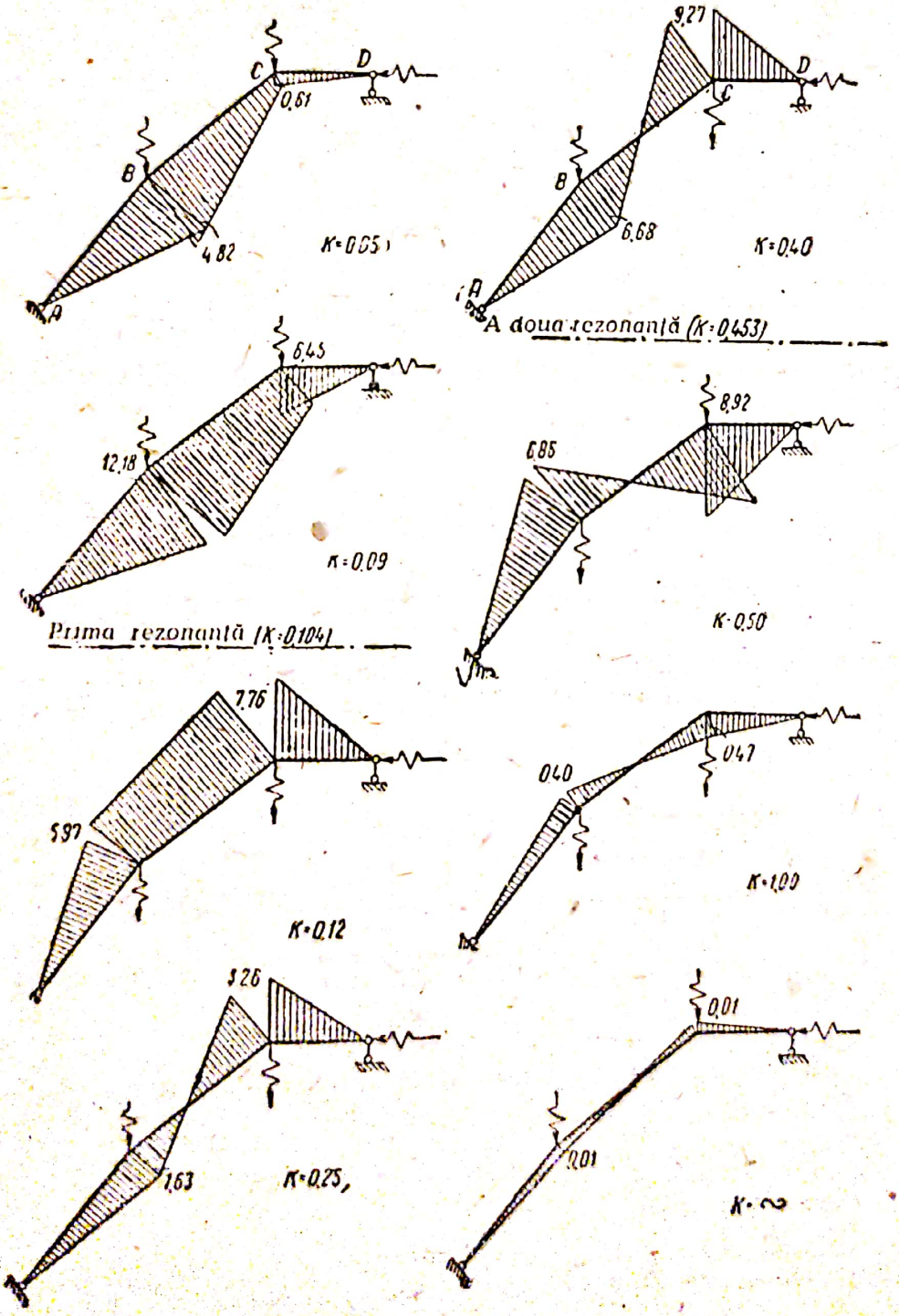


Fig. 52

Rezolvând această ecuație în raport cu λ, obținem:

$$\lambda_1 = 94{,}40\,; \quad \lambda_2 = 4{,}88.$$

Prin urmare

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{94{,}40}} \sqrt{\frac{EI}{m}} = 0{,}104 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{4{,}88}} \sqrt{\frac{EI}{m}} = 0{,}453 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Trecem la determinarea forțelor de inerție. Notând ca și mai înainte, $\vartheta = k \sqrt{\frac{EI}{m}}$, obținem:

$$\delta'_{11} = \delta_{11} - \frac{1}{m\vartheta^2} = \frac{1}{EI}\left(55{,}58 - \frac{1}{k^2}\right);$$

$$\delta'_{22} = \delta_{22} - \frac{1}{m\vartheta^2} = \frac{1}{EI}\left(43{,}70 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Ecuațiile de condiție pentru acest caz, după reducerea tuturor termenilor cu $\frac{1}{EI}$, iau următorul aspect:

$$\left(55{,}58 - \frac{1}{k^2}\right) Z_1 + 44{,}36\, Z_2 + 51{,}67 = 0$$

$$44{,}36\, Z_1 + \left(43{,}70 - \frac{1}{k}\right) Z_2 + 34{,}60 = 0.$$

Necunoscutele Z_1 și Z_2 vor depinde de k, adică de frecvența ϑ.

In tabloul 7 sunt trecute valorile Z_1 și Z_2 obținute pentru diferite valori ale lui k.

Tabloul 7

k	0	0,05	0,09	0,101 rezonanța	0,12	0,25	0,40	0,453 rezonanța	0,50	1,00	∞
Z_1	0	0,17	1,63	∞	—1,79	—0,12	3,29	∞	—6,45	—1,84	—1,56
Z_2	0	0,12	1,33	∞	—1,73	—1,05	—4,80	∞	6,32	1,10	0,79

In fig. 52 sunt reprezentate diagramele momentelor, calculate după formula (116)

$$M_{din} = M_p + \overline{M}_{11} Z_1 + \overline{M}_{12} Z_2$$

pentru diferite valori ale lui k.

Cu ajutorul acestor diagrame (fig. 52) este ușor să urmărim influența frecvenței încărcării oscilatorii asupra momentelor încovoietoare. In

cazul când frecvența ϑ se apropie de frecvența oscilațiilor proprii, momentele cresc considerabil.

Atunci când frecvența ϑ depășește mult frecvența oscilațiilor proprii, diagrama momentelor are ordonate foarte mici.

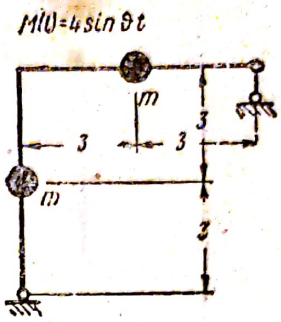


Fig. 53

Exemplul 10. *Să se studieze variația momentelor în funcție de momentul oscilator exterior* $M(t) = 4 \sin \vartheta t$ *aplicat la colțul unui cadru fără greutate cu două mase concentrate* $m_1 = m_2 = m$, *după cum se arată în fig. 53. Rigiditatea EI a ambelor bare este identică.*

In fig. 54 sunt reprezentate diagramele momentelor unitare $\bar{M}_1$ și $\bar{M}_2$ și diagrama M_p din încărcare.

Folosind metoda de înmulțire a diagramelor, obținem :

$$\delta_{11} = \frac{9}{2EI}\,; \quad \delta_{22} = \frac{54}{EI}\,; \quad \delta_{12} = \frac{27}{4EI}$$

$$\Delta_{1p} = \frac{9}{EI}\,; \quad \Delta_{2p} = \frac{24}{EI}$$

In primul rând determinăm valorile oscilațiilor proprii, în care scop compunem ecuația secular

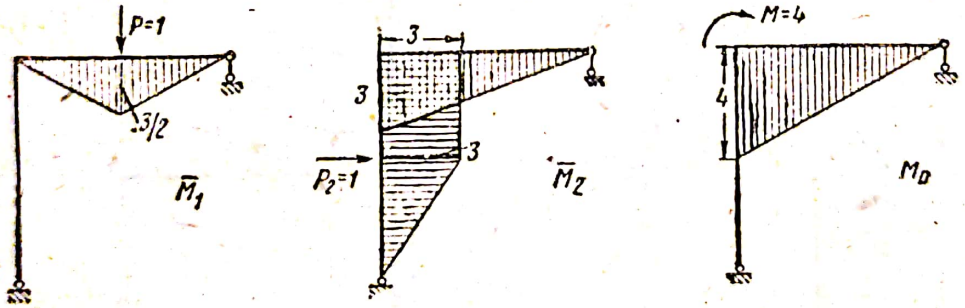


Fig. 54

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{m}{EI}\varphi^2 \cdot 4{,}5 - 1\right) & \frac{m}{EI}\varphi^2 \cdot 6{,}75 \\ \frac{m}{EI}\varphi^2 \cdot 6{,}75 & \left(\frac{m}{EI}\varphi^2 \cdot 54 - 1\right) \end{vmatrix} = 0$$

Rezolvând această ecuație obținem :

$$\varphi_1 = 0{,}135\sqrt{\frac{EI}{m}}\,; \quad \varphi_2 = 0{,}527\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Trecem apoi la determinarea forțelor de inerție Z

Notând $\vartheta = k\sqrt{\frac{EI}{m}}$; obținem

$$\frac{1}{m\vartheta^2} = \frac{1}{mk^2\frac{EI}{m}} = \frac{1}{k^2EI}$$

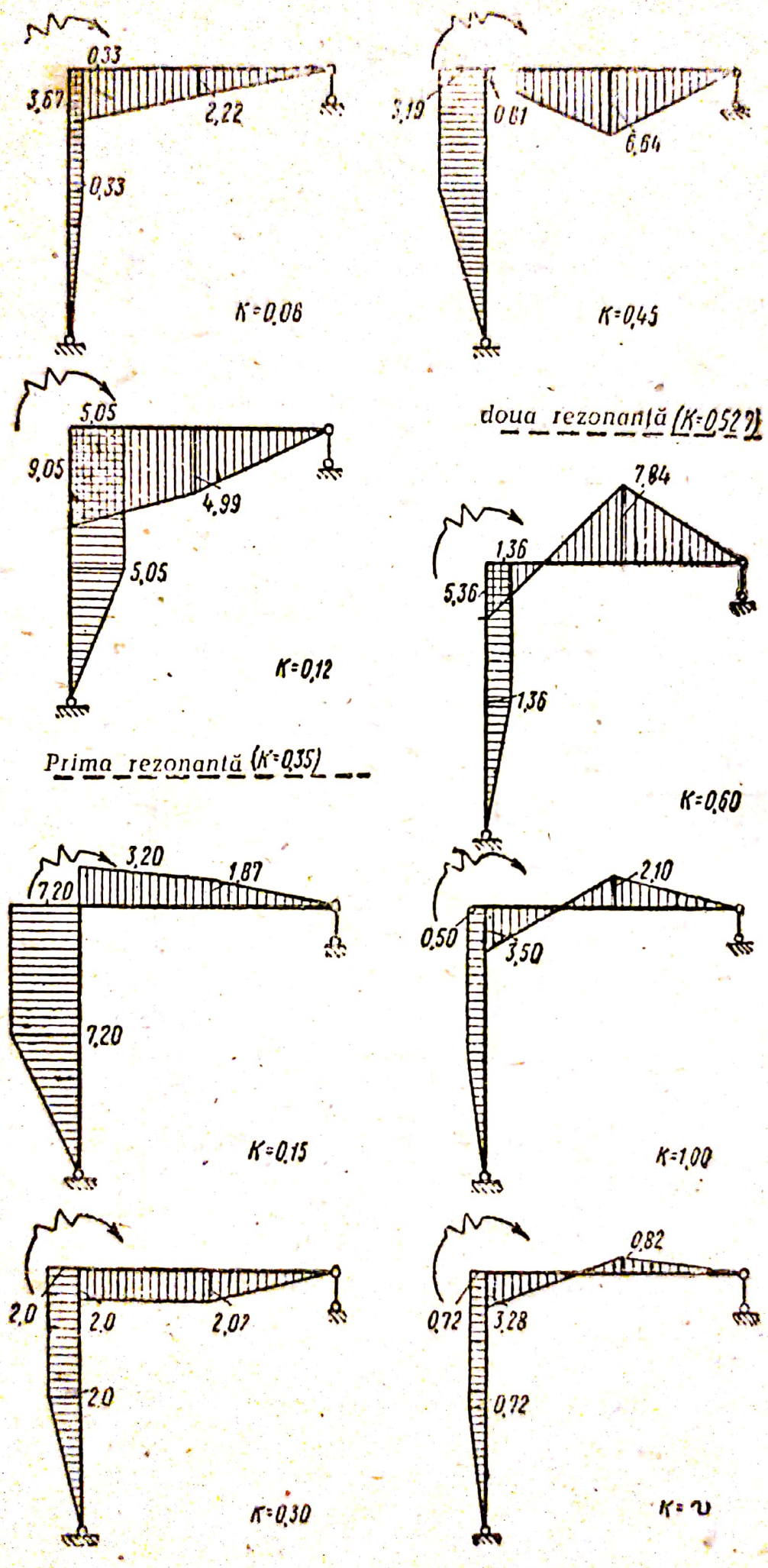


Fig. 55

Scanned with OKEN Scanner

Atunci

$$\delta_{11}^{*} = \delta_{11} - \frac{1}{m\vartheta^2} = \frac{1}{EI}\left(4{,}5 - \frac{1}{k^2}\right);$$

$$\delta_{22}^{*} = \delta_{22} - \frac{1}{m\vartheta^2} = \frac{1}{EI}\left(54 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Scriem ecuațiile de condiție

$$Z_1\ \delta_{11}^{*} + Z_2\ \delta_{12} + \Delta_{1p} = 0;$$

$$Z_1\ \delta_{21} + Z_2\ \delta_{22}^{*} + \Delta_{2p} = 0$$

După substituirea valorilor deplasărilor și după reducerea cu $\frac{1}{EI}$, ele vor lua următorul aspect :

$$\left(4{,}5 - \frac{1}{k^2}\right) Z_1 + 6{,}75\ Z_2 + 9 = 0\ ;$$

$$6{,}75\ Z_1 + \left(54 - \frac{1}{k^2}\right) Z_2 + 24 = 0$$

Când $k = \vartheta\sqrt{\frac{m}{EI}} = 0$, adică atunci când $\vartheta = 0$, forțele de inerție Z_1 și Z_2 vor fi egale cu zero.

Să examinăm cazul particular când $k = 0{,}06$. Atunci ecuațiile de mai sus se prezintă astfel :

$$-273{,}3\ Z_1 + 6{,}75\ Z_2 + 9 = 0$$
$$6{,}75\ Z_1 - 223{,}8\ Z_2 + 24 = 0$$

și obținem

$$Z_1 = 0{,}0357\ ;\quad Z_2 = 0{,}1085.$$

În tabloul 8 sunt extrase valorile forțelor de inerție pentru diferite valori ale lui k.

Tabloul 8

$k=$	0	0 06	0,12	0,135 rezo-nanța	0,15	0 30	0,45	0,527 rezo-nanța	0,6	1	∞
Z_1	0	0,036	0 313	∞	—0,180	0,682	4,160	∞	—7,020	—2,257	—1,640
Z_2	0	0,109	1,683	∞	—2,400	—0,666	—1,062	∞	0,455	—0,167	—0,240

Fig. 55 reprezintă diagramele momentelor dinamice pentru diferite valori ale lui k. Până la prima rezonanță valorile momentelor cresc în toate punctele, atingând valori infinit de mari în momentul în care frecvențele oscilațiilor libere și ale celor forțate coincid.

La sporirea următoare a frecvenței ϑ a oscilațiilor forțate momentele schimbă semnul.

Aceasta înseamnă că faza oscilațiilor forțate nu coincide cu faza încărcării oscilatorii. Decalarea fazei devine $\frac{\pi}{2}$ și datorită acestui fapt, atunci când într'un moment oarecare forța oscilatorie este dirijată în jos, rigla cadrului se deplasează în sus.

§ 24. Folosirea simetriei

La calculul sistemelor simetrice cu mase distribuite simetric ca și la calculele statice obișnuite, se recomandă să se facă gruparea forțelor de inerție necunoscute Z_i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$.

Ecuațiile de condiție se vor descompune în acest caz în două grupe: simetrice cu necunoscutele simetrice și antisimetrice cu forțele de inerție antisimetrice.

Atât necunoscutele simetrice cât și cele antisimetrice pot fi reprezentate sub forma de necunoscute simple sau cupluri de necunoscute. In anumite cazuri necunoscutele grupate pot să se compună chiar din patru forțe. In fig. 56 sunt reprezentate ca exemple: cuplurile de forțe (fig. 56 a) și grupele compuse din patru forțe (fig. 56 b).

Calculul deplasărilor δ_{ik} și Δ_{ip} se face în același mod ca și la calculele statice obișnuite. Trebue însă să avem în vedere că, calculul coeficienților principali δ^*_{ii}, care se referă la cupluri de necunoscute, urmează să se facă după formula

$$\delta^*_{ii} = \delta_{ii} - \frac{2}{m\vartheta^2} \tag{118}$$

iar nu după formula (109)

$$\delta^*_{ii} = \delta_{ii} - \frac{1}{m\vartheta^2}$$

Dacă necunoscutele se compun din grupe de patru forțe (fig. 56 b) trebue să se aplice formula

$$\delta^*_{ii} = \delta_{ii} - \frac{4}{m\vartheta^2} \tag{119}$$

Formulele (118) și (119) pot fi obținute ușor, urmărind compunerea ecuațiilor de condiție (§ 21).

La calculele dinamice ale sistemelor simetrice sunt aplicabile următoarele reguli:

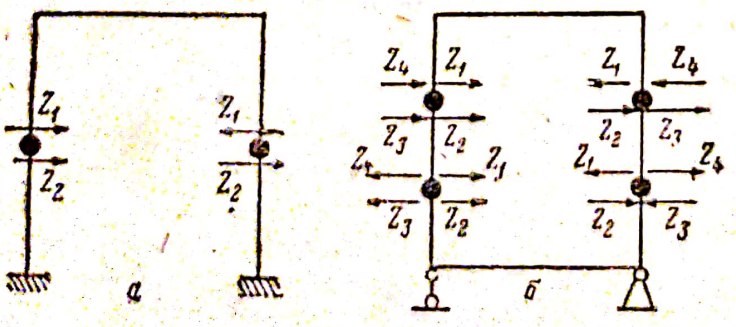


Fig. 56

1) La acțiunea încărcării simetrice oscilatorii, toate forțe e de inerție necunoscute antisimetrice sunt nule și, invers, la încărcarea antisimetrică forțele de inerție necunoscute simetrice (grupate sau izolate) sunt egale cu zero.

Această regulă arată că la orice încărcare simetrică oscilatorie într'o construcție simetrică sunt posibile numai diagrame simetrice ale eforturilor interioare.

2) In orice sistem simetric cu încărcarea simetrică (antisimetrică)

Scanned with OKEN Scanner

fenomenul rezonanței se produce numai în cazul când frecvența încărcării oscilatorii coincide cu frecvențele oscilațiilor proprii, la care corespund forme simetrice (antisimetrice) ale deformațiilor.

Astfel, de exemplu, într'o grindă simplu rezemată, la o încărcare oscilatorie simetrică, rezonanța se produce atunci când frecvența ϑ a încărcării oscilatorii coincide cu prima, a treia, a cincea, adică cu oricare frecvență fără soț a oscilațiilor libere ale sistemului.

Observăm că la rezolvarea sistemelor simetrice cu încărcare nesimetrică. descompunerea încărcării în simetrică și antisimetrică nu este neapărat necesară. In cazurile când determinarea deplasărilor cere calcule prea laborioase, descompunerea încărcării poate să fie lăsată la o parte.

Exemplul 11. *Să se construiască diagrama momentelor dinamice pentru un cadru fără greutate, reprezentat în fig. 57 a, supus la o încărcare oscilatorie* $P(t) = 2 \sin \vartheta$.

Intrucât sistemul este simetric și cu masele distribuite simetric, facem gruparea necunoscutelor după cum se arată în fig. 57 b. La încărcarea simetrică forțele de inerție antisimetrice Z_3 și Z_4 sunt egale cu zero. De aceea problema va conține numai două necunoscute Z_1 și Z_2. In fig. 58 sunt înfățișate diagramele momentelor $\overline{M}_1$ și $\overline{M}_2$ provenite din forțele unitare $\overline{Z}_1$ și $\overline{Z}_2$, precum și diagrama de încărcare M_p

Calculăm deplasările:

a) pentru grupul simetric al necunoscutelor.

$$EI\delta_{11} = 108; \qquad EI\delta_{22} = 72$$
$$EI\delta_{12} = -54; \qquad EI\,\Delta_{1p} = 216{,}0$$
$$EI\,\Delta_{2p} = -108.$$

b) pentru grupul antisimetric al necunoscutelor

$$EI\delta_{33} = 720; \qquad EI\delta_{34} = 540;$$
$$EI\delta_{44} = 432.$$

Determinăm frecvențele oscilațiilor proprii. Pentru oscilațiile simetrice considerăm că masa $m_2 = \frac{m}{2}$; atunci ecuația seculară se va scrie astfel:

$$\begin{vmatrix} \left(103\frac{\varphi^2 m}{EI} - 1\right) & -\frac{1}{2}54\frac{\varphi^2 m}{EI} \\ -54\frac{\varphi^2 m}{EI} & \left(\frac{1}{2}72\frac{\varphi^2 m}{EI} - 1\right) \end{vmatrix} = 0$$

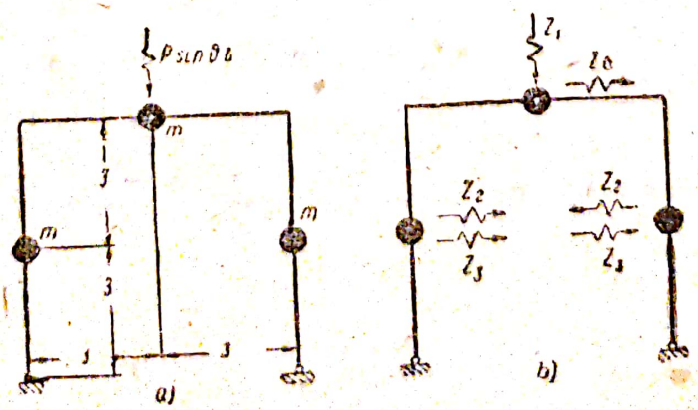


Fig. 57

Rezolvarea acestei ecuații ne dă două frecvențe;

$$\varphi_2 = 0{,}0896\sqrt{\frac{EI}{m}}; \qquad \varphi_3 = 0{,}2263\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

In cazul de față frecvența minimă se produce la oscilații de formă antisimetrică. In acest caz admitem că $m_2 = \frac{m}{2}$ și atunci ecuația seculară va fi:

$$\begin{vmatrix} \left(360\,\frac{\varphi^2 m}{EI} - 1\right) & 540\,\frac{\varphi^2 m}{EI} \\ 270\,\frac{\varphi^2 m}{EI} & \left(432\,\frac{\varphi^2 m}{EI} - 1\right) \end{vmatrix} = 0$$

și rezolvând-o obținem

$$\varphi_1 = 0{,}0358\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\varphi_4 = 0{,}2887\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

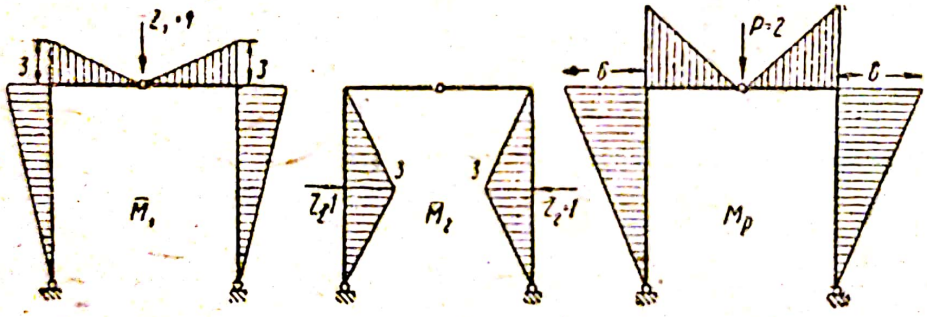


Fig. 58

Trecem acum la compunerea ecuațiilor de condiție pentru determinarea forțelor de inerție; mai întâi scriem expresiile deplasărilor:

$$\delta^*_{11} = \delta_{11} - \frac{1}{m\vartheta^2} = \frac{1}{EI}\left(108 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$\delta^*_{22} = \delta_{22} - \frac{1}{m\vartheta^2} = \frac{1}{EI}\left(72 - 2\,\frac{1}{k^2}\right)$$

în care

$$k = \vartheta\sqrt{\frac{m}{EI}}$$

Ecuațiile de condiție pentru necunoscutele simetrice se vor scrie astfel;

$$\left(108 - \frac{1}{k^2}\right) Z_1 - 54\,Z_2 + 216 = 0$$

$$-54\,Z_1 + \left(72 - \frac{2}{k^2}\right) Z_2 - 108 = 0$$

Necunoscutele antisimetrice sunt egale cu zero, întrucât încărcarea este simetrică.

In tabloul 9 sunt trecute valorile forțelor de inerție Z_1 și Z_2 corespunzătoare la diferite valori ale lui k.

Tabloul 9

$k =$	0	0,02	0,08	0,0896 rezonanță	0,10	0,15	0,20	0,2263 rezonanță	0,25	1	∞
Z_1	0	0,09	6,70	∞	−8,50	−2,38	−1,00	∞	−3,68	−2,03	−2,0
Z_2	0	−0,02	−1,96	∞	2,74	1,20	2,48	∞	−2,27	−0,02	0

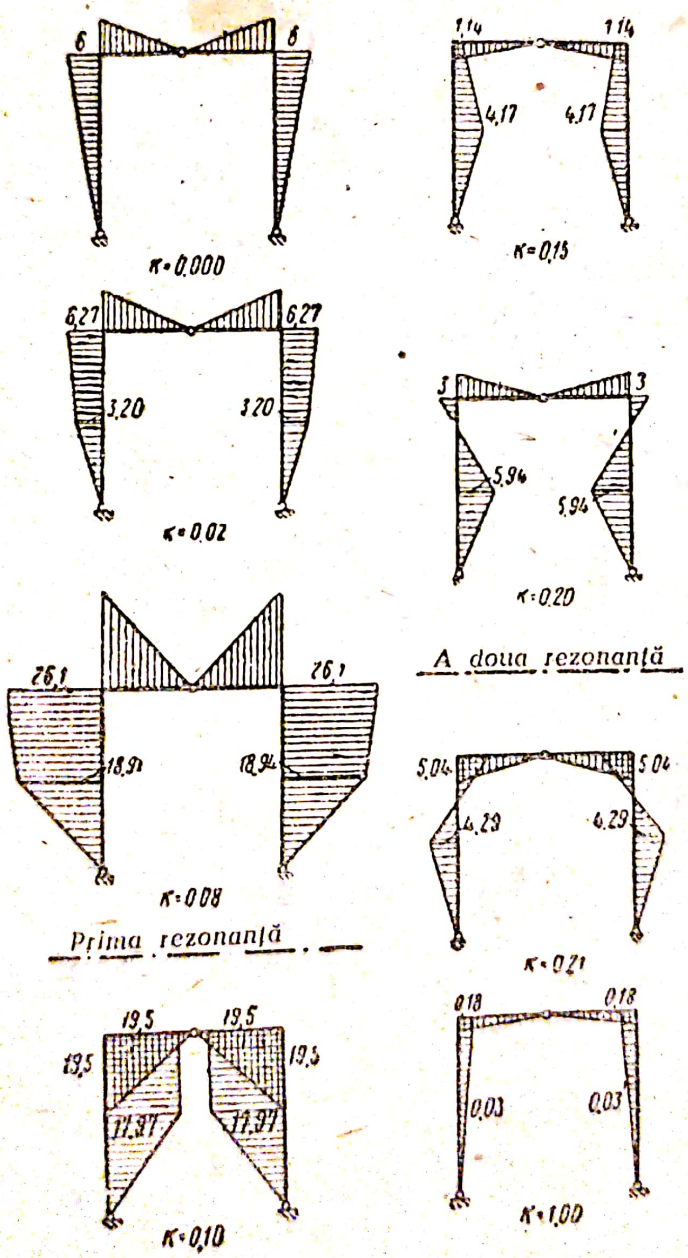


Fig. 59

Fig. 59 reprezintă diagramele momentelor pentru opt valori diferite ale lui k, după care este ușor să urmărim caracterul solicitării cadrului sub acțiunea diferitelor sarcini oscilatorii.

Scanned with OKEN Scanner

§ 25. Calculul construcţiilor la greutatea proprie

Calculul construcţiilor la acţiunea greutăţii proprii constă în luarea în considerare a masei uniform distribuite pe toată lungimea elementelor.

Un astfel de sistem va avea un număr infinit de grade de libertate, ceea ce complică foarte mult rezolvarea problemei. O asemenea rezolvare, pentru un număr infinit de grade de libertate la acţiunea forţelor oscilatorii, este analizată mai departe în § 26.

După cum s'a arătat în § 15, înlocuind masele distribuite cu mase concentrate se poate obţine pentru frecvenţa minimă o precizie suficientă. Pornind dela aceleaşi considerente şi făcând înlocuirea maselor distribuite cu mase concentrate în diferite puncte, soluţia aproximativă se poate aplica şi la calculul cadrelor sub acţiunea forţelor oscilatorii.

La cadre, repartizarea maselor concentrate care înlocuesc masele distribuite, se face în acelaş fel ca şi la grinzi (a se vedea § 15). In fig. 60 este înfăţişată o schemă posibilă de repartizare la un cadru a maselor concentrate. La cadre, spre deosebire de grinzi, se introduc în calcul masele raportate la capetele barelor, adică în nodurile cadrului dacă aceste noduri pot să se deplaseze.

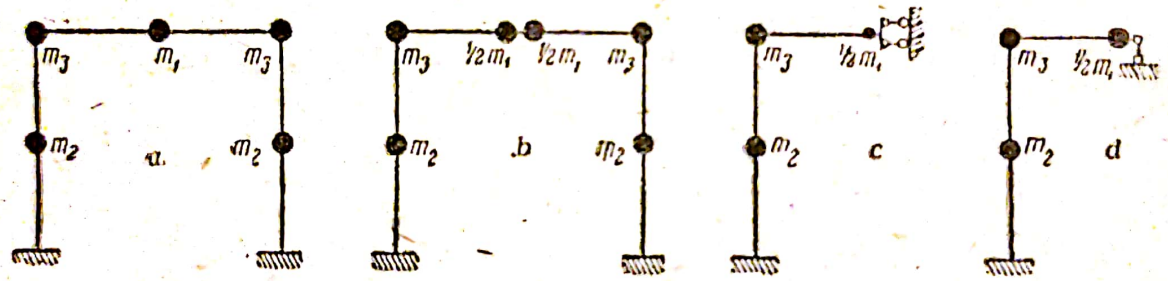


Fig. 60

La cadrele simetrice cu distribuţia simetrică a maselor, se recomandă folosirea condiţiilor de simetrie care simplifică operaţiile de calcul.

Simetria poate să fie folosită în două feluri:

1) Masele care se găsesc pe axa de simetrie (fig. 60 a) se împart în două părţi (fig. 60 b) iar cadrul se înlocueşte cu o singură jumătate, cu deplasări echivalente cu oscilaţiile cadrului întreg. (fig. 60 c şi d).

2) Forţele de inerţie ale maselor repartizate simetric se consideră drept cupluri de necunoscute grupate, după cum s'a arătat în exemplul precedent.

Trebue să avem în vedere că, înlocuind masa distribuită cu mase concentrate, obţinem o mare precizie la determinarea primei frecvenţe minime a oscilaţiilor proprii, pentru care diferenţa faţă de valoarea exactă nu depăşeşte în general 1—2%, pentru frecvenţele următoare (superioare) eroarea creşte brusc şi poate atinge o valoare considerabilă. Aceeaşi situaţie se prezintă şi la calculul oscilaţiilor forţate sub acţiunea unei încărcări oscilatorii. Vom obţine o precizie satisfăcătoare pentru cazurile când frecvenţa datorită sarcinilor oscilatorii nu de-

Scanned with OKEN Scanner

păşeşte valoarea primei frecvenţe a oscilaţiilor proprii. Insă, în general, pentru scopurile practice nu este nevoie să facem calculele pentru cazurile când frecvenţa datorită forţelor oscilatorii depăşeşte prima şi mai ales a doua frecvenţă. Intr'o construcţie reală, dimensiunile trebuesc alese de obiceiu în aşa fel, încât prima frecvenţă minimă a oscilaţiilor proprii să fie mai mare decât frecvenţa maximă posibilă a sarcinilor oscilatorii. Aşa dar, calculele practice trebuesc făcute pentru cazurile când raportul $\vartheta : \varphi$ este cuprins între 0 şi valoarea primei rezonanţe. Pornind dela aceste considerente, în cele ce urmează vom ţine seamă de cazurile solicitării construcţiei până la prima rezonanţă. Să examinăm un exemplu numeric.

Exemplul 12. *Să se construiască diagrama momentelor dinamice pentru cadrul unui pasaj superior de tipul reprezentat în fig. 61, care se găseşte sub acţiunea unui grup de forţe dinamice indicate în figură. Greutăţile tuturor elementelor sunt identice şi egale cu Q. Masa fiecărui element este* $m = \frac{Q}{g}$.

Concentrăm jumătatea masei fiecărui element în mijlocul lui, şi câte un sfert în nodurile elementului. Nodurile cadrului nu au deplasări, de aceea masele concentrate în noduri nu vor intra în calcul.

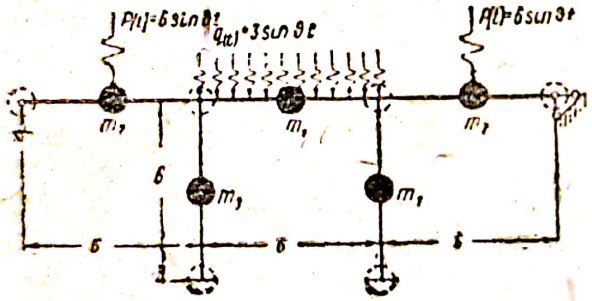


Fig. 61

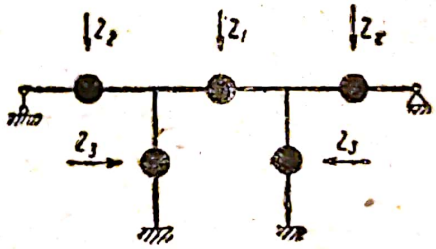


Fig. 62

Intrucât sarcina dinamică este simetrică, forma oscilaţiilor proprii va fi de asemenea simetrică. Necunoscutele simetrice grupate sunt arătate în fig. 62.

Sistemul dat este de şase ori static nedeterminat. Pentru construirea diagramelor unitare şi a diagramelor de încărcare, metoda cea mai indicată este metoda deformaţiilor, după care numărul necunoscutelor la încărcarea simetrică este egal cu zero. Diagramele unitare ale momentelor $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$, construite pentru sistemul static nedeterminat, sunt reprezentate în fig. 63, iar diagrama lui M_P — în fig. 64.

Calculul valorilor deplasărilor δ_{11}, δ_{12} şi δ_{22} se poate face utilizând diagrama construită.

Se cunoaşte că forţa unitară la calculul deplasărilor în sistemele static nedeterminate poate să fie aplicată la oricare sistem static determinat. Ne vom folosi de această posibilitate, luând diagramele auxiliare M', arătate în aceiaşi fig. 63 (în dreapta).

Inmulţind diagramele, obţinem

$$EI\,\delta_{11} = 1{,}88 \qquad EI\,\delta_{12} = -1{,}13$$
$$EI\,\delta_{22} = 5{,}63 \qquad EI\,\delta_{13} = -0{,}75$$
$$EI\,\delta_{33} = 3{,}00 \qquad EI\,\delta_{23} = 1{,}13$$

Determinăm mai întâi frecvenţele oscilaţiilor proprii, având în vedere că masele corespunzătoare cuplurilor de necunoscute trebuesc luate pe jumătate.

Scanned with OKEN Scanner

Compunem ecuaţia seculară :

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11} m\varphi^2 - 1) & \delta_{12}\dfrac{m}{2}\varphi^2 & \delta_{13}\dfrac{m}{2}\varphi^2 \\ \delta_{21} m\varphi^2 & \left(\delta_{22}\dfrac{m}{2}\varphi^2 - 1\right) & \delta_{23}\dfrac{m}{2}\varphi^2 \\ \delta_{31} m\varphi^2 & \delta_{23}\dfrac{m}{2}\varphi^2 & \left(\delta_{33}\dfrac{m}{2}\varphi^2 - 1\right) \end{vmatrix} = 0$$

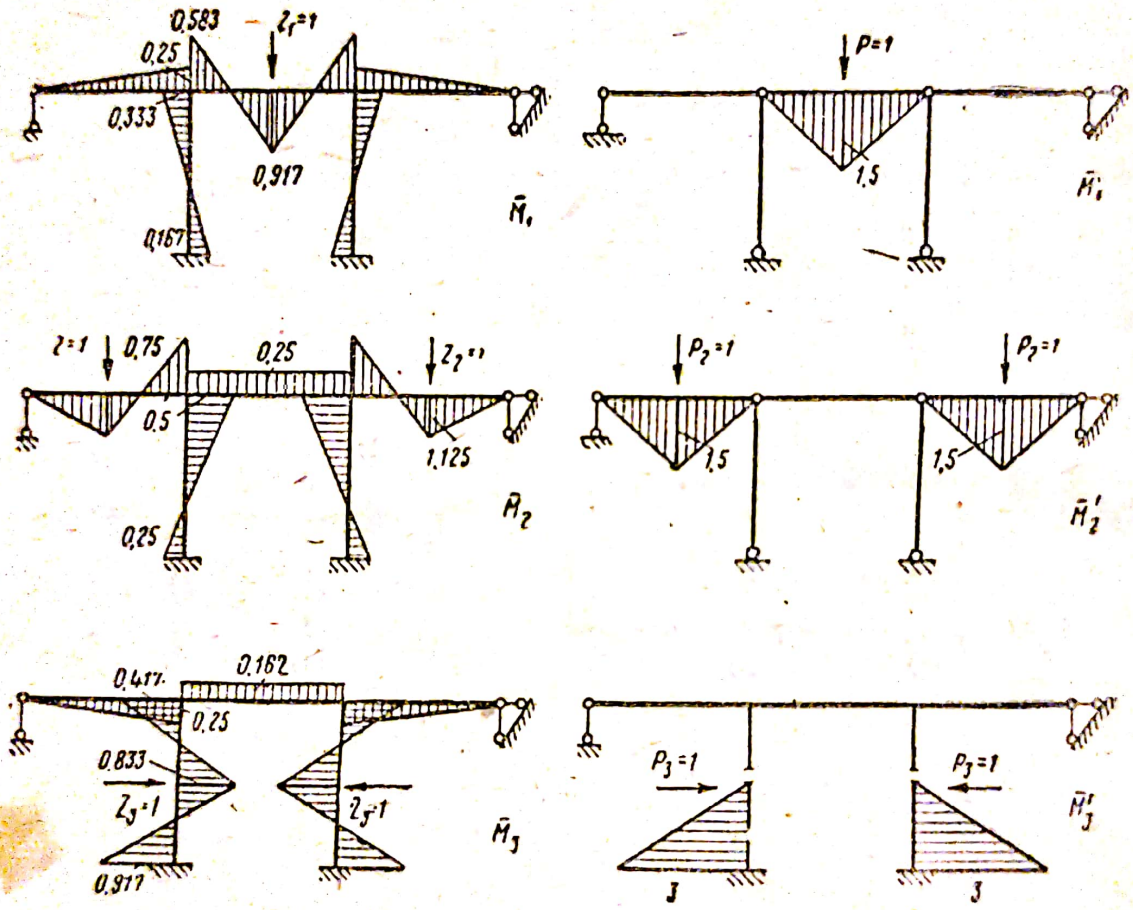


Fig. 63

Substituind valorile deplasărilor obţinem :

$$\begin{vmatrix} (1{,}880 - \lambda) & -0{,}565 & -0{,}375 \\ -1{,}130 & (2{,}815 - \lambda) & 0{,}565 \\ -0{,}750 & 0{,}565 & (1{,}500 - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(a)}$$

în care

$$\lambda = \frac{EI}{m\varphi^2} \qquad \text{(b)}$$

Rezolvând ecuaţia (a) obţinem

$$\lambda_1 = 3{,}55; \qquad \lambda_2 = 1{,}50; \qquad \lambda_3 = 1{,}14$$

Pe baza expresiei (b) frecvențele oscilațiilor au următoarele valori:

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{EI}{m\lambda_1}} = 0{,}531\sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\varphi_2 = 0{,}816\sqrt{\frac{EI}{m}}; \qquad \varphi_3 = 0{,}937\sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Calculăm acum deplasările provocate de încărcare prin înmulțirea diagramei de încărcare M_p (fig. 64) cu diagramele auxiliare unitare $\overline{M}_1'$, $\overline{M}_2'$, $\overline{M}_3'$ (fig. 63)

$$EI\triangle_{1p} = 12{,}37; \qquad EI\triangle_{2p} = 20{,}25; \qquad EI\triangle_{3p} = -2{,}25,$$

Alegem frecvența sarcinilor oscilatorii

$$\vartheta = 0{,}6\,\varphi_{min} = 0{,}319\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

și determinăm deplasarea principală

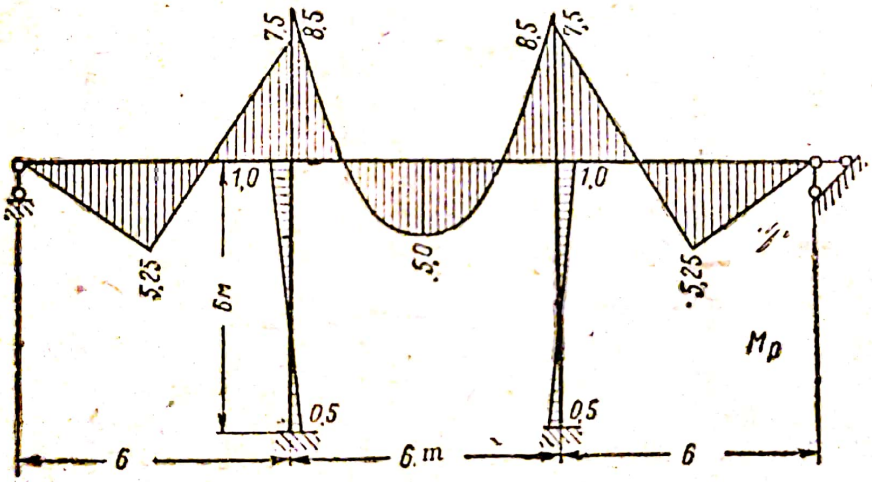


Fig. 64

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m\vartheta^2} = \frac{1}{EI}\left(1{,}88 - \frac{1}{0{,}319^2}\right) = -\frac{7{,}94}{EI};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{2}{m\vartheta^2} = \frac{1}{EI}\left(5{,}63 - \frac{2}{0{,}319^2}\right) = -\frac{14{,}01}{EI};$$

$$\delta_{33}^* = \delta_{33} - \frac{2}{m\vartheta^2} = \frac{1}{EI}\left(3{,}00 - \frac{2}{0\,319^2}\right) = -\frac{16{,}64}{EI},$$

Ecuațiile de condiție pentru determinarea forțelor de inerție necunoscute Z_1 Z_2, Z_3 reduse cu factorul comun $\frac{1}{EI}$, au următorul aspect:

$$-7{,}94\,Z_1 - 1{,}13\,Z_2 - 0{,}75\,Z_3 + 12{,}37 = 0;$$
$$-1{,}13\,Z_1 - 14{,}01\,Z_2 + 1{,}13\,Z_3 + 20{,}25 = 0;$$
$$-0{,}75\,Z_1 + 1{,}13\,Z_2 - 16{,}64\,Z_3 - 2{,}25 = 0.$$

Rezolvând aceste ecuații găsim:

$$Z_1 = 1{,}390; \quad Z_2 = 1{,}327; \quad Z_3 = -0.108.$$

Pentru construirea diagramei momentelor dinamice, calculăm momentele în punctele caracteristice cu ajutorul formulei (116)

$$M_k = M_{kp} + 1{,}390\,\overline{M}_{k1} + 1{,}327\,\overline{M}_{k2} - 0{,}103\,\overline{M}_{k3}$$

Diagrama obținută este înfățișată în fig. 65. In aceiași figură este reprezentată, cu linii punctate, diagrama dată de amplitudinile forțelor dinamice ($\vartheta = 0$).

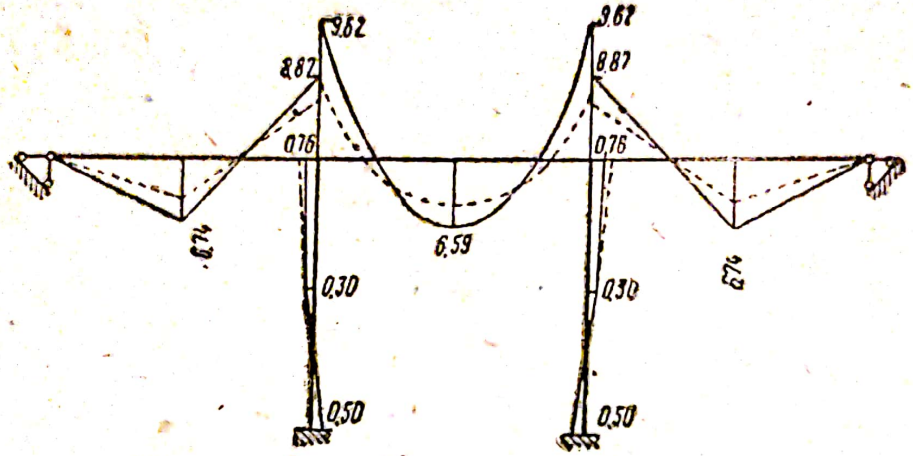


Fig. 65

§ 26. Oscilațiile forțate ale unui sistem cu mase distribuite continuu

In § 10 s'a arătat că oricare sistem cu mase uniform repartizate are un număr infinit de grade de libertate. Calculul aproximativ al unui asemenea sistem poate fi efectuat prin metodele expuse în paragrafele precedente. In acest scop, este necesar să înlocuim masa distribuită cu mase concentrate în puncte izolate. Dorind să obținem o exactitate cât mai mare, trebue ca la aplicarea acestei metode să luăm un număr cât mai mare de mase concentrate, ceea ce are drept rezultat calcule complicate ale unui sistem cu mai multe ecuații. Problema se simplifică însă dacă aplicăm ecuația generalizată pentru calculul amplitudinilor oscilațiilor forțate.[1]

Să examinăm o bară cu secțiunea plină, care se găsește sub acțiunea unei serii de sarcini oscilatorii (fig. 66); vom considera că toate forțele exterioare oscilatorii, precum și momentele variază în funcție de timp cu una și aceeași frecvență ϑ.

Pentru ca să deducem ecuațiile de bază, vom examina mai întâi prima porțiune care nu are nici forțe concentrate, nici momente, ci numai o încărcare oscilatorie uniform distribuită cu intensitatea

$$p(t) = p \sin \vartheta t,$$

în care ϑ este frecvența încărcării oscilatorii.

[1] Această metodă aplicată la problemele dinamicii este prelucrată detaliat de către N. I, Bezuhov în „Unele generalizări ale metodelor Mecanicii și Dinamicii construcțiilor" publicată în Cercetări în Domeniul Mecanicii Construcțiilor. Culegerea Nr. 3. 1939.

Scanned with OKEN Scanner

In aceste condiții, deplasarea fiecărui punct al sistemului va reprezenta o oscilație armonică; cu aceeași frecvență ϑ vor varia și forțele tăietoare Q și momentele M în toate secțiunile barei.

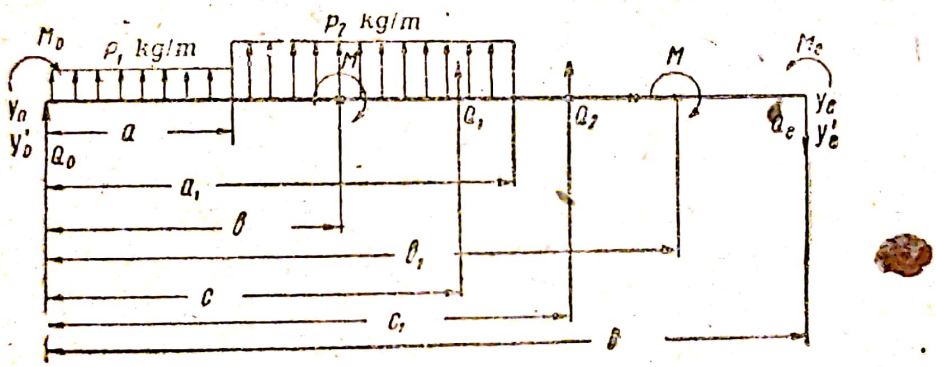
Astfel, prima porțiune a grinzii poate fi reprezentată sub forma unei bare cu încărcarea oscilatorie, cu momentele pulsatorii M_0 și M_a și cu forțele tăietoare pulsatorii Q_0 și Q_a aplicate la capete (fig. 66 a).

Bazându-ne pe metodele Mecanicii Construcțiilor, putem să scriem ecuația diferențială a oscilațiilor transversale ale barei sub forma următoare [a se vedea formula (61)]:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p \sin \vartheta t$$

în care EI este rigiditatea barei care se consideră constantă pe toată lungimea și

m — masa pe unitatea de lungime a barei;



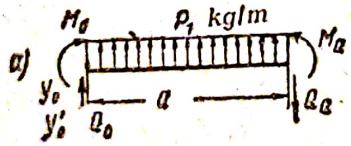


Fig. 66

La oscilații stabilizate, oscilațiile forțate ale fiecărui punct vor fi armonice cu frecvența ϑ, deci, deplasările unui punct oarecare $y(x, t)$ pot fi reprezentate sub forma următoare:

$$y(x,t) = y(x) \sin \vartheta t$$

unde $y(x)$ reprezintă amplitudinea punctului cu coordonata x.

Derivând în raport cu x și t obținem

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = y^{IV}(x) \sin \vartheta t$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = - y(x) \vartheta^2 \sin \vartheta t$$

și substituind aceste valori în ecuația (120) găsim

$$y^{IV}(x) - k^4 y(x) = \frac{p}{EI} \qquad (121)$$

în care

$$k = \sqrt{\frac{m\,\omega^2}{EI}} \qquad (122)$$

Integrala ecuației (121), compusă din integrala generală (64) și integrala particulară, va avea următoarea formă;

$$y(x) = A \operatorname{ch} kx + B \operatorname{sh} kx + C \cos kx + D \sin kx - \frac{p_1}{k^4 EI}$$

După transformările indicate în § 10, această ecuație se prezintă astfel

$$y(x) = C_1 A_{kx} + C_2 B_{kx} + C_3 C_{kx} + C_4 D_{kx} - \frac{p_1}{k^4 EI} \qquad (123)$$

Cei de al doilea factori ai termenilor din membrul al doilea al ecuației, se exprimă prin funcțiuni hiperbolice (65).

Constantele C_1, C_2, C_3 și C_4 se determină din condițiile inițiale:

pentru $x = 0$; $y(x) = y_0$; $y'(x) = y'_0$; $y''(x) = \frac{M_0}{EI}$

$$y'''(x) = \frac{Q_0}{EI}.$$

Luând derivata a treia a ecuației (123) și având în vedere că pentru $x = 0$; $A_{kx} = 1$ și $B_{kx} = C_{kx} = D_{kx} = 0$, obținem:

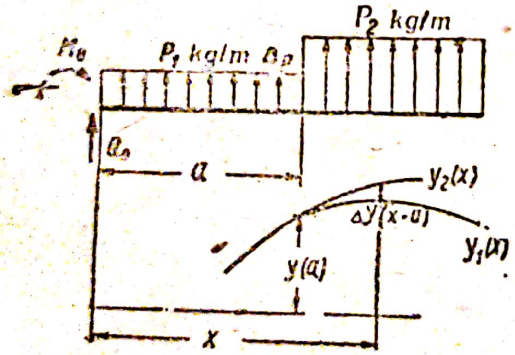


Fig. 67

$$C_1 - \frac{p_1}{k^4 EI} = y_0$$

$$C_2 = y'_0 \cdot \frac{1}{k_1}$$

$$C_3 = \frac{M_0}{EI} \cdot \frac{1}{k^2}$$

$$C_4 = \frac{Q_0}{EI} \cdot \frac{1}{k^3}$$

Astfel, ecuația (123) pentru prima porțiune a grinzii se poate scrie în felul următor:

$$y(x) = y_0 A_{kx} + \frac{1}{k} y'_0 B_{kx} + \frac{1}{k^2} \cdot \frac{M_0}{EI} C_{kx} + \frac{1}{k^3} \frac{Q_0}{EI} D_{kx} - \frac{p_1}{k^4 EI}(1 - A_{kx}) \qquad (124)$$

Pentru ca să obținem ecuația deformației pentru porțiunea a doua, scriem ecuația diferențială pentru două porțiuni adiacente (fig. 67).

Pentru prima porțiune când $x < a$ avem (121)

$$y_1^{IV}(x) - k^4 y(x) = \frac{p_1}{EI} \qquad (125)$$

Pentru porțiunea a doua când $x > a$, ecuația va avea următorul aspect;

$$y_2^{IV}(x) - k^4 y_2(x) = \frac{p_2}{EI} \tag{126}$$

Scriem diferența celor două funcții (fig. 67)

$$y_2(x) - y_1(x) = \Delta y(x-a)$$

la care corespunde și egalitatea

$$y^{IV}(x) - y_1^{IV}(x) = \Delta y^{IV}(x-a).$$

Scăzând ecuația (125) din ecuația (126) obținem

$$\Delta y^{IV}(x-a) - k^4 \Delta y(x-a) = \frac{p_2 - p_1}{EI} = \frac{\Delta p}{EI}$$

Ecuația obținută are aceeași formă ca și ecuația (121) numai cu diferența că argumentul x este înlocuit cu argumentul $(x-a)$; prin urmare integrala acestei ecuații coincide ca formă cu integrala (123)

$$\Delta y(x-a) = C_{12} A_{k(x-a)} + C_{22} B_{k(x-a)} + C_{32} C_{k(x-a)} + C_{42} D_{k(x-a)} - \frac{\Delta p}{k^4 EI} \tag{127}$$

Cei de al doilea factori ai termenilor din membrul al doilea a acestei ecuații se exprimă prin funcțiuni hiperbolice.

A doua cifră a indicilor constantelor C_{12}, C_{22}, C_{32}, C_{42}, arată că aceste constante se referă la porțiunea a doua și se determină din condițiile inițiale pentru această porțiune.

Pentru $x = a$ curba axei deformate este continuă, prin urmare

$$\Delta y(a) = 0 \qquad \Delta y'(a) = 0.$$

Momentul exterior și forța tăietoare exterioară fiind nule, urmează că creșterea momentului este nulă:

$$\Delta^{II} y(a) = \frac{\Delta M}{EI} = 0$$

de asemenea și creșterea forței tăietoare

$$\Delta^{III} y(a) = \frac{\Delta Q}{EI} = 0$$

Derivând de trei ori ecuația (127) și ținând seama că, conform expresiei (65) pentru $x = a$:

$$A_{k(x-a)} = 1$$

$$B_{k(x-a)} = C_{k(x-a)} = D_{k(x-a)} = 0$$

obținem

$$\Delta y(a) = C_{12} - \frac{\Delta p_a}{k^4 EI} = 0; \qquad \Delta'' (a) = C_{32} = 0;$$

$$\Delta y'(a) = C_{22} = 0; \qquad \Delta y'''(a) = C_{42} = 0$$

Pentru aceste valori ale constantelor ecuația (127) se transformă astfel:

$$\Delta y\,(x-a) = -\frac{\Delta p_a}{k^4 EI}\,(1 - A_{k(x-a)})$$

Substituind această valoare $\Delta y\ (x-a)$ în ecuația (125) obținem ecuația axei deformate în porțiunea a doua a grinzii

$$y_2(x) = y_1(x) - \frac{\Delta p_a}{k^4 EI}\,(1 - A_{k\,(x-a)})$$

$y_1\ (x)$ se determină din ecuația (124), deci

$$y_2(x) = y_0 A_x + \frac{1}{k} y_0' B_{kx} + \frac{1}{k^2}\frac{M_0}{EI} C_{kx} + \frac{1}{k^3}\frac{Q_0}{EI} D_{kx} -$$

$$- \frac{p_0}{k^4 EI}\,(1 - A_{kx}) - \frac{\Delta p_a}{k^4 EI}\,(1 - A_{k\,(x-a)}) \qquad (128)$$

Efectuând aceleași calcule ca și pentru stabilirea ecuației axei deformate în porțiunea a treia, care are în punctul de joncțiune cu porțiunea a doua momentul exterior M și pornind dela condiția că pentru $x = b$

$$\Delta y\,(b) = 0 \qquad \Delta y'(b) = 0$$

$$\Delta y''(b) = \frac{\Delta M}{EI} = \frac{M}{EI} \quad \text{și} \quad \Delta y'''(b) = \frac{\Delta Q}{EI} = 0$$

obținem

$$\Delta y\,(x-b) = \frac{\Delta M}{k^2 EI} C_{k\,(x-b)}$$

Deducții similare se pot face pentru toate punctele de trecere dela o porțiune la alta unde există o variație a încărcării (fig. 66)).

Astfel, când A, B. C, și D sunt legate printr'o funcțiune diferențială, ecuația definitivă a axei deformate pentru oricare porțiune a grinzii, ecuațiile unghiurilor de înclinare a tangentelor față de axa deformată, ecuațiile momentelor și ale forțelor tăietoare din secțiunile barei se vor scrie astfel (66).

$$\left.\begin{aligned}
EIy_x &= EIy_0 A_{kx} + EI\,y_0' \frac{1}{k} B_{kx} + M_0 \frac{1}{k^2} C_{kx} + Q_0 \frac{1}{k^3} D_{kx} - \\
&- \frac{p_0}{k^4}\,(1 - A_{kx}) + \sum M \frac{1}{k^2} C_{k\,(x-b)} + \sum Q \frac{1}{k^3} D_{k\,(x-c)} - \\
&- \sum \frac{p}{k^4}\,(1 - A_{k\,(x-a)})\,; \\
EIy_x' &= EIy_0\, kD_{kx} + EIy_0' A_{kx} + M_0 \frac{1}{k} B_{kx} + Q_0 \frac{1}{k^2} C_{kx} + \\
&+ \frac{p_0}{k^3} D_{kx} + \sum M \frac{1}{k} B_{k\,(x-b)} + \sum Q \frac{1}{k^2} C_{k\,(x-c)} +
\end{aligned}\right\} \qquad (129)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+\sum \frac{p}{k^3} D_{k(x-n)};$$

$$EIy''_x = M_x = EIy_0 k^2 C_{kx} + EIy'_0 kD_{kx} + M_0 A_{kx} +$$
$$+ Q_0 \frac{1}{k} B_{kx} + \frac{p_0}{k^2} C_{kx} + \sum MA_{k(x-b)} + \sum Q \frac{1}{k} B_{k(x-c)} +$$
$$+ \sum \frac{p}{k^2} C_{k(x-n)}; \qquad (129)$$

$$EIy'''_x = Q_x = EIy_0 k^3 B_{kx} + EIy'_0 k^2 C_{kx} + M_0 kD_{kx} +$$
$$+ Q_0 A_{kx} + \frac{p_0}{k} B_{kx} + \sum M_k D_{k(x-b)} + \sum QA_{k(x-c)} +$$
$$+ \sum \frac{p}{k} B_{k(x-a)}$$

In aceste ecuații y_0, y'_0, M_0, Q_0 și p_0 sunt respectiv: ordonata săgeții, tangenta unghiului de înclinare, momentul, forța tăietoare și intensitatea forței pulsatorii la extremitatea barei când $x = 0$. Valorile a, b și c sunt abscisele punctelor de aplicație ale forțelor p, M și Q, adică abscisele limitelor porțiunilor.

Aplicarea expresiilor (129) pentru determinarea amplitudinilor punctelor barei, a momentelor și a forțelor tăietoare în secțiunile ei, este arătată în exemplele care urmează. În aceste exemple se arată și influența raportului dintre frecvența oscilațiilor proprii și frecvențele forțelor pulsatorii.

Exemplul 13. *Să se studieze variația coeficientului dinamic când variază frecvența forței oscilatorii aplicată la mijlocul unei grinzi* (fig. 68 a).

Deschiderea grinzii $l = 2$ m; greutatea proprie $q = 25$ kg/m, momentul de inerție $I_z = 2000$ cm^4.

$E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm^2; $g = 981 \approx 1000$ cm/sec^2. Frecvența ϑ variază dela 100 sec^{-1} până la 10.000. sec^{-1}.

In grinda de față

pentru $x = 0$ $\quad y_0 = 0$ $\quad M_0 = 0$

pentru $x = \frac{l}{2}$ $\quad y'_{l/2} = 0$ $\quad Q_{l/2} = \frac{1}{2} P.$

Aceasta permite să formăm două ecuații ale sistemului (129) pentru determinarea necunoscutelor y'_0 și Q_0:

$$EIy'_{l/2} = EIy'_0 A_{k\,l/2} + \frac{1}{k^2} Q_0 C_{k\,l/2} = 0$$

$$Q_{l/2} = EIy'_0 k^2 C_{k\,l/2} + Q_0 A_{k\,l/2} = \frac{P}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvarea acestor ecuații ne dă

$$EIy'_0 = -\frac{P}{2k^2}\frac{C_{k\,l/2}}{A^2_{k\,l/2} - C^2_{k\,l/2}}$$

$$C_0 = \frac{P}{2}\cdot\frac{A_{k\,l/2}}{A^2_{k\,l/2} - C^2_{k\,l/2}}$$

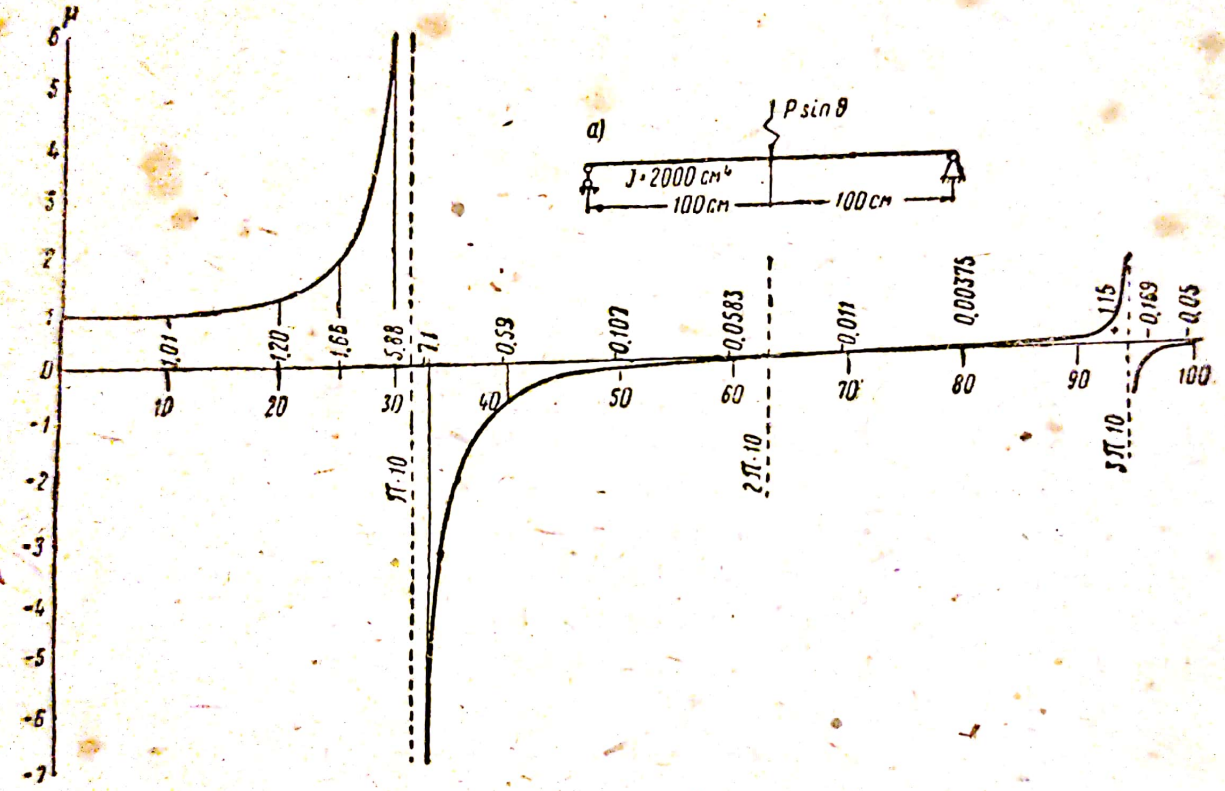


Fig. 68

Amplitudinea deformației la dreptul punctului de aplicație al forței e determină prin ecuația

$$EIy_{l/2} = EIy'_0 \cdot \frac{1}{k^2}B_{k\,l/2} + \frac{1}{k^3}Q_0 D_{k\,l/2}.$$

Substituind expresiile lui y'_0 și Q_0 și făcând transformările obținem:

$$EIy_{l/2} = \frac{P}{2k^3}\cdot\frac{-B_{k\,l/2}C_{k\,l/2} + A_{k\,l/2}\cdot D_{k\,l/2}}{A^2_{k\,l/2} - C^2_{k\,l/2}} = \frac{P}{2k^3}F.$$

Trecând la exemplul numeric, trebue să determinăm mai întâi coeficientul k, care variază în funcție de valoarea lui ϑ.

Conform expresiei (122)

$$k = \sqrt[4]{\frac{q\cdot\vartheta^2}{gEI}} = \sqrt[4]{\frac{0{,}25\,\vartheta^2}{10^3\cdot 2\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^3}} = 0{,}5\cdot 10^{-3}\sqrt{\vartheta}.$$

In funcție de valoarea lui $k\frac{l}{2}$ vor varia și valorile $A_{kl/2}$, $B_{kl/2}$, $C_{kl/2}$, $D_{kl/2}$, care intră în expresia lui F, care se determină cu ajutorul unui tablou (a se vedea anexa 3).

In tabloul 10 sunt efectuate calculele coeficientului dinamic pentru diferite valori ale lui ϑ.

Pentru grinda considerată

$$y_{st} = \frac{-Pl^3}{48\,EI} = \frac{-P\cdot 200^3}{48\cdot 2\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^3} = -\frac{P}{24\,000}\ \text{cm}.$$

Tabloul 10

$\sqrt{\vartheta}$	ϑ sec^{-1}	k	$k\frac{l}{2}=100k$	F	$y_{0,5\,l}$ din	$\mu=\frac{y_{din}}{y_{st}}$	Frecvența oscilațiilor proprii
10	100	0,005	0,5	0,0421	$-\frac{0,0421}{1000}$	1,01	
20	400	0,01	1	0,40	$-\frac{1}{20000}$	1,20	
25	625	0,0125	1,25	1,08	$-\frac{1,08}{15625}$	1,66	
30	900	0,015	1,50	6,60	$-\frac{1}{4090}$	5,86	
31	961	0,0155	1,55	24,1	$\frac{1}{1235}$	19,4	
31,7	1004	0,0158	1,58	−35,6	$\frac{1,12}{1000}$	−26,9	$\varphi_1 = 987$ sec^{-1}
33	1089	0,0165	1,65	−10,3	$\frac{1}{3380}$	−7,1	
40	1600	0,0200	2,00	−1,57	$\frac{1}{40700}$	−0,59	
54	2916	0,0270	2,7	−0,702	$\frac{1}{224000}$	−0,107	
62	3844	0,031	3,1	−0,52	$\frac{1}{458000}$	−0,0583	$\varphi_2 = 3948$ sec^{-1}
74	5476	0,037	3,7	−0,1867	$\frac{1}{2170000}$	−0,0111	
80	6400	0,040	4,0	+0,0795	$-\frac{1}{6450000}$	+0,00375	
94	8836	0,047	4,7	+39,8	$-\frac{1}{20900}$	+1,15	$\varphi_3 = 8784$ sec^{-1}
96	9216	0,048	4,8	−6,20	$+\frac{1}{142500}$	−0,1685	
100	10000	0,050	5,0	−2,19	$+\frac{1}{457000}$	−0,053	

In fig. 68 b este reprezentată diagrama variației coeficientului dinamic pentru diferite valori ale lui ϑ. Intrucât încărcarea este simetrică, fenomenul de rezonanță este exprimat clar la prima și la a treia frecvență a oscilațiilor proprii.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 14. *Să se urmărească variația valorii momentelor în secțiunile unei grinzi încastrate la ambele capete, în raport cu variația frecvenței încărcării pulsatorii uniform distribuite, care acționează pe jumătatea deschiderii grinzii (fig. 69).*

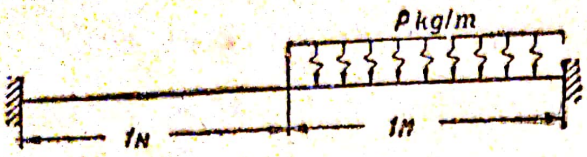


Fig. 69

Folosind condițiile inițiale dela capetele grinzii, după care :

pentru $x = 0 \quad y_0 = 0 \quad$ și $\quad y_0' = 0$

pentru $x = l \quad y = 0 \quad$ și $\quad y_l' = 0$

formăm două ecuații pentru determinarea necunoscutelor M_0 și Q_0

Pe baza sistemului de ecuații (129) scriem :

$$EIy_l = \frac{1}{k^2} M_0 C_{kl} + \frac{1}{k^3} Q_0 D_{kl} - \frac{p}{k^4}(A_{k\,l/2} - 1) = 0$$

$$EIy_l' = \frac{1}{k} M_0 B k_l + \frac{1}{k^2} Q_0 C_{kl} - \frac{p}{k^3} D_{k\,l/2} = 0.$$

Rezolvând aceste ecuații în raport cu necunoscutele M_0 și Q_0 obținem :

$$M_0 = \frac{p}{k^2} \frac{(A_{k\,l/2} - 1) C_{kl} - D_{kl} D_{k\,l/2}}{C_{kl}^2 - B_{kl} D_{kl}} = \frac{p}{k^2} F :$$

$$Q_0 = \frac{p}{k} \cdot \frac{D_{k\,l/2} - F B_{kl}}{C_{kl}}.$$

Valorile momentelor încovoietoare în deschiderea grinzii se determină cu ajutorul formulelor (129) :

— în partea din stânga a grinzii

$$M_x = M_0 A_{kx} + \frac{1}{k} Q_0 B_{kx}; \qquad (a)$$

— în partea din dreapta

$$M_x = M_0 A_{kx} + \frac{1}{k} Q_0 B_{kx} - \frac{p}{k^2} C_{kl\,(x\,-\,l/2)}. \qquad (c)$$

Calculul momentelor s'a făcut pentru următoarele valori ale frecvențelor :

$\vartheta = 0$; $\vartheta = 30^2 = 900$; $\vartheta = 46^2 = 2\,116$; $\vartheta = 48^2 = 2\,304$; $\vartheta = 60^2 = 3600$; $\vartheta = 70^2 = 4\,900$ și $\vartheta = 90^2 = 8\,100$.

In tabloul 11 sunt indicate valorile momentelor în cinci secțiuni ale grinzii, calculate pentru valorile de mai sus ale frecvenței forțelor pulsatorii. Calculul momentelor s'a făcut cu formulele (a) și (b) cu ajutorul tabelelor auxiliare (anexa 3).

In fig. 70 sunt reprezentate diagramele momentelor pentru frecvențele forțelor pulsatorii indicate în tabloul 11.

Tabloul 11

k	$\sqrt{\vartheta}$	ϑ	Ordonatele diagramelor momentelor în kg·m				
			M_0	$M_{\frac{1}{4}l}$	$M_{\frac{1}{2}l}$	$M_{\frac{3}{4}l}$	M
0	0	0	— 10,43 p	— 1,042 p	+ 8,33 p	+ 5,21 p	— 22,91 p
0,015	30^2	900	— 12,15 p	— 1.02 p	+ 9,68 p	+ 4,5 p	— 27,15 p
0,023	46^2	2116	— 138,0 p	+ 11,15 p	+ 86,2 p	+ 18,33 p	— 152,5 p
	$47,3^2$	2237		*1-a*	*rezonanță*		
0,024	48^2	2304	+ 256,5 p	— 21,7 p	— 137,5 p	+ 25.7 p	+ 396,0 p
0 030	60^2	3600	+ 16,56 p	— 5,08 p	— 6.48 p	+ 4,57 p	— 1,72 p
0,035	70^2	4900	+ 13,73 p	— 6,97 p	— 6,13 p	— 16,95 p	— 149,6 p
	$78,5^2$	6162		*2-a*	*rezonanță*		
0,040	90^2	8100	— 8,57 p	+ 5,41 p	— 4,58 p	— 28,6 p	— 222,2 p

Scanned with OKEN Scanner

§ 27. Calculul dinamic al cadrelor cu masa distribuită continuu[1)]

Metoda parametrilor inițiali pentru calculul grinzilor încărcate cu o sarcină continuă, examinată în paragraful precedent, poate fi aplicată cu bune rezultate pentru determinarea oscilațiilor forțate și proprii ale cadrelor cu mase distribuite continuu.

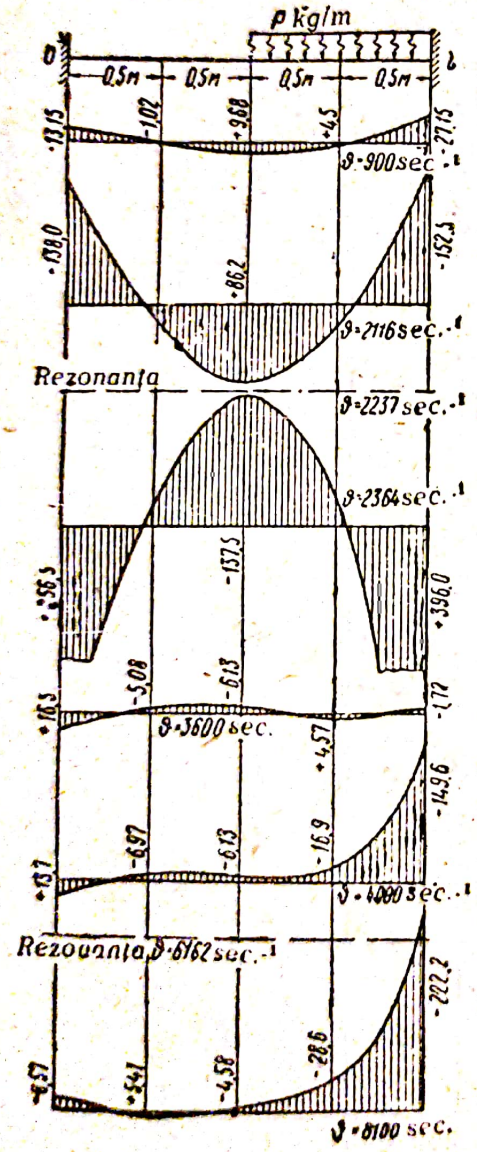


Fig. 70

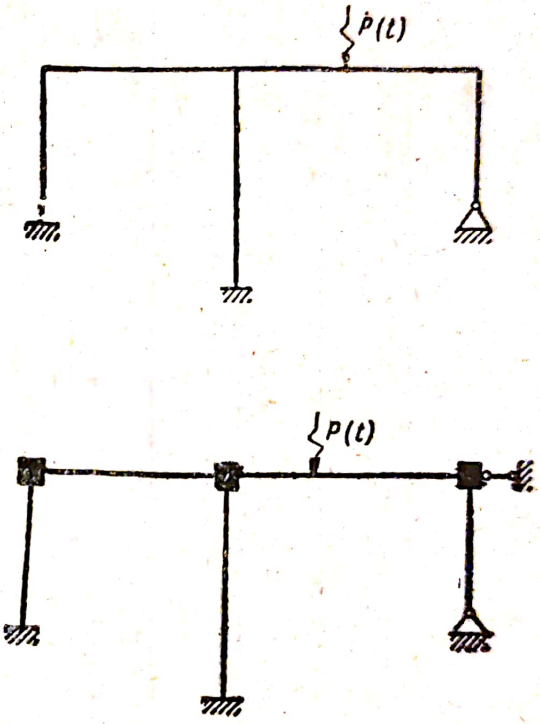


Fig. 71

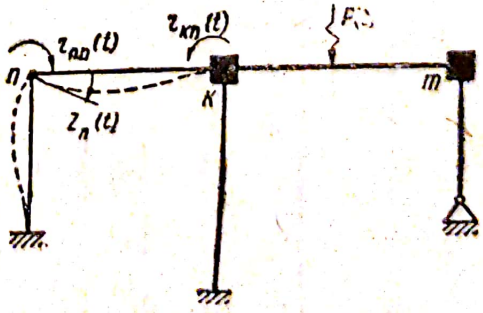


Fig. 72

După cum se cunoaște, calculul static al cadrelor, prin metoda deplasărilor se bazează pe introducerea în sistemul cadrului a unui nu-

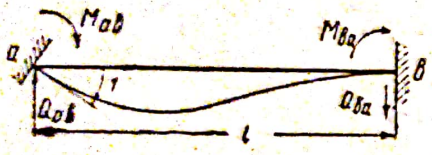
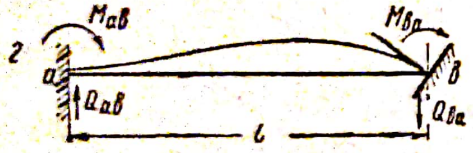
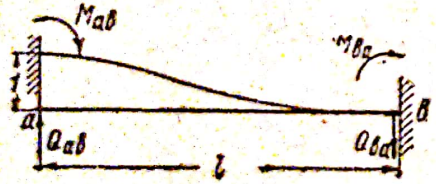
---

1) § 27 a fost elaborat de prof. V. A. Kiseliev.

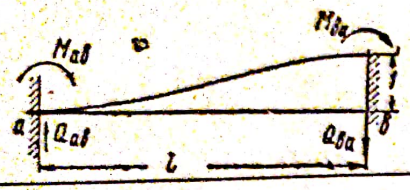
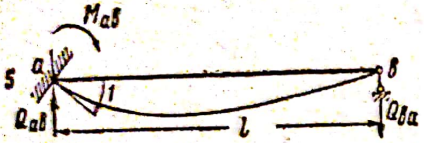
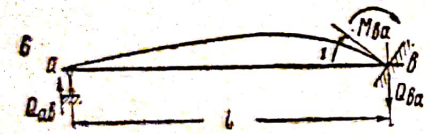
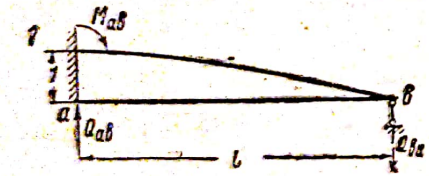
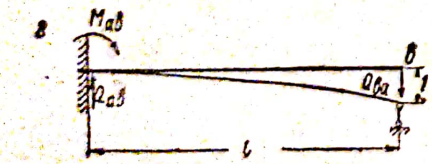
Tabloul 12

Momentele și forțele tăietoare dela extremitățile barei și funcțiunile $f(kl) = f(\lambda)$

$A_\lambda = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,\lambda + \cos\lambda)$; $E_\lambda = \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\,\lambda + \sin\lambda)$; $C_\lambda = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,\lambda - \cos\lambda)$; $D_\lambda = \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\,\lambda - \sin\lambda)$.

Caracterul deplasării	Momentele dela extremitățile barei		Forțele tăietoare dela extremitățile barei	
	în stânga M_{ab}	în dreapta M_{ba}	în stânga Q_{ab}	în dreapta Q_{ba}
	$M_{ab} = \frac{4EI}{l} f_3(\lambda)$	$M_{ba} = \frac{2EI}{l} f_5(\lambda)$	$Q_{ab} = -\frac{6EI}{l^2} f_4(\lambda)$	$Q_{ba} = -\frac{6EI}{l^2} f_6(\lambda)$
	$f_3(\lambda) = \frac{\lambda(E_\lambda C_\lambda - A_\lambda F_\lambda)}{4(C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda)}$	$f_5(\lambda) = \frac{\lambda \cdot D_\lambda}{2(C_\lambda - B_\lambda D_\lambda)}$	$f_4(\lambda) = -\frac{\lambda^2(C_\lambda A_\lambda - E_\lambda^2)}{6(C_\lambda^2 - B_\lambda F_\lambda)}$	$f_6(\lambda) = \frac{\lambda^2 C_\lambda}{6(C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda)}$
	$M_{ab} = -\frac{2EI}{l} f_5(\lambda)$	$M_{ba} = \frac{4EI}{l} f_3(\lambda)$	$Q_{ab} = -\frac{6EI}{l^2} f_6(\lambda)$	$Q_{ba} = -\frac{6EI}{l^2} f_4(\lambda)$
	$M_{ab} = -\frac{6EI}{l^2} f_4(\lambda)$	$M_{ba} = -\frac{6EI}{l^2} f_8(\lambda)$	$Q_{ab} = \frac{12EI}{l^3} f_7(\lambda)$	$Q_{ba} = \frac{12EI}{l^3} f_9(\lambda)$
	$f_4(\lambda) = \frac{\lambda^2(C_\lambda A_\lambda - E_\lambda^2)}{6(C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda)}$	$f_8(\lambda) = \frac{\lambda^2 C_\lambda}{6(C_\lambda^2 - E_\lambda D_\lambda)}$	$f_7(\lambda) = \frac{\lambda^3(A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda)}{12(C_\lambda^2 - E_\lambda D_\lambda)}$	$f_9(\lambda) = \frac{\lambda^3 B_\lambda}{12(C_\lambda^2 - E_\lambda D_\lambda)}$

Scanned with OKEN Scanner

	$M_{ab}=-\frac{6EI}{l^2}f_8(\lambda)$	$M_{ba}=-\frac{6EI}{l^2}f_4(\lambda)$	$Q_{ab}=\frac{12EI}{l^3}f_9(\lambda)$	$Q_{ba}=\frac{12EI}{l^3}f_7(\lambda)$
	$M_{ab}=\frac{3EI}{l}f_{10}(\lambda)$	O	$Q_{ab}=-\frac{3EI}{l^2}f_{11}(\lambda)$	$Q_{ba}=-\frac{3EI}{l^2}f_{12}(\lambda)$
5 	$f_{10}'(\lambda)=\frac{\lambda(F_\lambda^2-D_\lambda^2)}{3(B_\lambda C_\lambda-A_\lambda D_\lambda)}$		$f_{11}(\lambda)=\frac{\lambda^2(C_\lambda D_\lambda-A_\lambda B_\lambda)}{3(B_\lambda C_\lambda-A_\lambda D_\lambda)}$	$f_{12}(\lambda)=\frac{\lambda^2 F_\lambda}{3(B_\lambda C_\lambda-A_\lambda D_\lambda)}$
6 	O	$M_{ba}=\frac{3EI}{l}f_{10}(\lambda)$	$Q_{ab}=\frac{-3EI}{l^2}f_{12}'(\lambda)$	$Q_{ba}=-\frac{3EI}{l^2}f_{11}'(\lambda)$
7 	$M_{ab}=-\frac{3EI}{l^2}f_{11}(\lambda)$	O	$Q_{ab}=-\frac{3EI}{l^3}f_{13}(\lambda)$	$Q_{ba}=-\frac{3EI}{l^3}f_{14}(\lambda)$
			$f_{13}(\lambda)=\frac{\lambda^3(C_\lambda^2-A_\lambda^2)}{3(B_\lambda C_\lambda-A_\lambda D_\lambda)}$	$f_{14}(\lambda)=\frac{\lambda^3 A_\lambda}{3(B_\lambda C_\lambda-A_\lambda D_\lambda)}$
8 	$M_{ab}=-\frac{3EI}{l^3}f_{12}(\lambda)$	O	$Q_{ab}=-\frac{3EI}{l^3}f_{14}(\lambda)$	$Q_{ba}=-\frac{3EI}{l^3}f_{15}'(\lambda)$ $f_{15}'(\lambda)=\frac{\lambda^3(B_\lambda D_\lambda-A_\lambda^2)}{3(B_\lambda C_\lambda-A_\lambda D_\lambda)}$

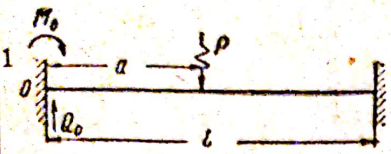
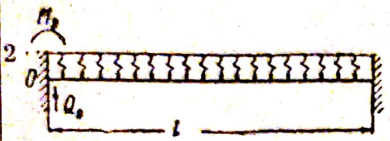
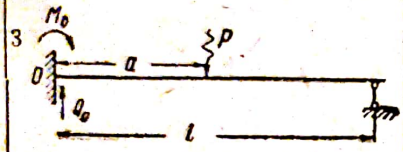
măr de legături suplimentare, care împiedică deplasările unghiulare și liniare ale nodurilor cadrului, care se prezintă astfel ca o formă descompusă alcătuită din diferite bare cu forțe aplicate la capetele lor. La efectuarea calculului dinamic se poate folosi aceeași metodă introducând în sistemul cadrului legături dinamice suplimentare care împiedică deplasările nodurilor cadrului (fig. 71).

Legăturile momentelor care împiedică rotirea nodurilor se aplică la toate nodurile rigide ale sistemului, iar legăturile forțelor care împiedică deplasările liniare ale nodurilor, se aplică în raport cu gradul lui de mobilitate [a se vedea „Statica construcțiilor" partea II, Metoda deplasărilor (deformațiilor)]. La o încărcare pulsatorie, reacțiunile date de această încărcare vor fi de asemenea pulsatorii.

Ecuațiile de condiție ale metodei deplasărilor, exprimate în raport cu valorile dinamice ale reacțiunilor și deplasărilor se vor scrie astfel:

$$\left.\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \cdots\cdots + R_{1p} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \cdots\cdots + R_{2p} &= 0; \\ \cdots\cdots\cdots\

Tabloul 13

Nr.	Schema grinzii și a încărcării	Reacțiunile	
		M_0	Q_0
1		$M_0 = \frac{P}{k}\frac{C_{kl}D_{k(l-a)} - D_{kl}C_{k(l-a)}}{C_{kl}^2 - B_{kl}D_{kl}}$	$Q_0 = P - \frac{C_{kl}C_{k(l-a)} - B_{kl}D_{k(l-a)}}{C_{kl}^2 - B_{kl}D_{kl}}$
2		$M_0 = \frac{q}{k^2}\frac{C_{kl}(A_{kl}-1) - D_{kl}^2}{C_{kl}^2 - B_{kl}D_{kl}}$	$Q_0 = \frac{q}{k}\frac{C_{kl}D_{kl} - B_{kl}(A_{kl}-1)}{C_{kl}^2 - B_{kl}D_{kl}}$
3		$M_0 = \frac{P}{k}\frac{B_{kl}D_{k(l-a)} - D_{kl}B_{k(l-a)}}{B_{kl}C_{kl} - A_{kl}D_{kl}}$	$Q_0 = P\frac{C_{kl}B_{k(l-a)} - A_{kl}D_{k(l-a)}}{B_{kl}C_{kl} - A_{kl}D_{kl}}$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații de condiție (130) se determină amplitudinile deplasărilor dinamice ale nodurilor.

Apoi, fiecare bară a sistemului trebue să fie calculată independent, după metoda parametrilor inițiali, pe măsură ce se vor stabili deplasările capetelor ei, compunând pentru fiecare din ele expresiile lui y, y', M și Q.

Cu ajutorul expresiilor lui M și Q se pot construi diagramele lor și apoi, folosind diagrama lui Q, se poate construi pe calea obișnuită diagrama lui N.

Oscilațiile proprii ale sistemelor în cadre se determină de asemenea cu ajutorul ecuațiilor de condiție ale oscilațiilor libere, care se obțin din ecuațiile (130) dacă în ele toți termenii proveniți din încărcare vor fi egali cu zero, adică

$$\left.\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \cdots + r_{1n}Z_n &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \cdots + r_{2n}Z_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (132)$$

Prin rezolvarea obişnuită a acestui determinant, se obţine parametrul kl.

Intrucât diversele bare pot avea pentru acest parametru valori diferite, este necesar ca toate valorile kl ale diferitelor bare să fie raportate la o bară oarecare, aplicând formula

$$k_n^4 = k_o^4 \frac{q_n}{q_o} \frac{I_o}{I_n}$$

în care q_n şi I_n sunt: încărcarea statică pe unitatea de lungime, respectiv momentul de inerţie al secţiunii n;

q_o şi I_o reprezintă aceleaşi valori ale barei „principale" la care se raportează celelalte bare.

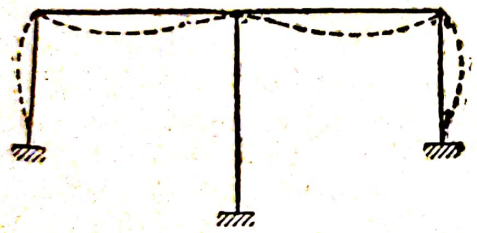


Fig. 73

Notând

$$\xi_n = \sqrt[4]{\frac{q_n}{q_o} \frac{I_o}{I_n}}$$

obţinem:

$$\bar{k}_n = k_o \xi_n \text{ şi } \bar{k}_n l_n = k_o l_o \xi_n \frac{l_n}{l_o}$$

Ecuaţia frecvenţei va fi întotdeauna transcendentă în raport cu parametrul k- sau kl, prin urmare singura cale pentru soluţionarea ei este cea prin încercări (a se vedea exemplul 3).

După ce obţinem rădăcinile ecuaţiei (132) k sau kl, frecvenţele oscilaţiilor proprii se determină prin formula

$$\varphi = k^2 \sqrt{\frac{gEI_o}{q_o}} \qquad (133)$$

în care q_o şi I_o se referă la bara la care se raportează toate barele sistemului.

Desfăşurarea calculului este arătată în exemplul 15.

In diferite cazuri particulare de sisteme simetrice sunt posibile forme de oscilaţii, pentru care deplasările nodurilor cadrului sunt egale cu zero, de exemplu la forma arătată în fig. 73.

În aceste cazuri este necesar să substituim în ecuaţia (131) aceste valori nule ale deplasărilor nodurilor şi să compunem pentru noul sistem de ecuaţii un nou determinant, rezolvându-l după cum s'a arătat mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 15. *Să se construiască diagrama momentelor dinamice pentru cadrul reprezentat în fig. 74 a, având următoarele date:*

$$EI = \text{const.} \qquad k_{ab} = 0{,}6\ \text{m}^{-1}$$

$$k_{ac} = 0{,}3\ \text{m}^{-1} \qquad k_{ad} = 0{,}5\ \text{m}^{-1}$$

Sistemul de calcul va avea o legătură a momentelor în nodul central (fig 74 b) Ecuația de condiție se va scrie astfel:

$$r_{11} Z_1 + R_{1p} = 0$$

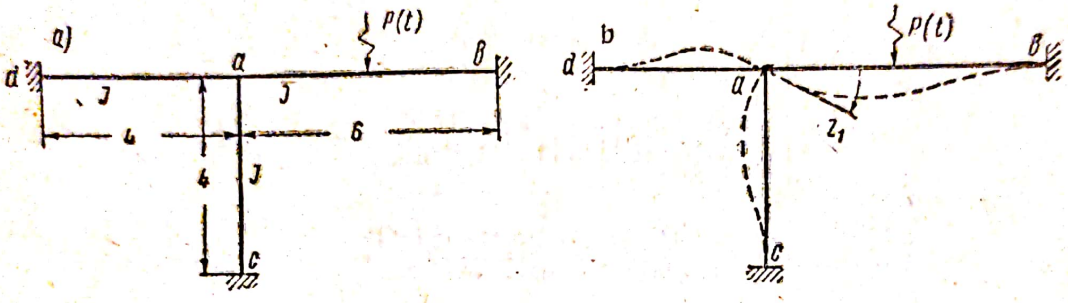


Fig. 74

Valoarea r_{11}, ca reacțiune de moment este egală cu suma momentelor dela capetele barelor, care converg în nodul considerat, produse de rotirea nodului cu unghiul $Z_1 = 1$.

$$r_{11} = \sum \frac{4EI}{l} f_3(kl) =$$

$$= 4\,EI \left[\frac{1}{l_{ab}} f_3(k_{ab}\, l_{ab}) + \frac{1}{l_{ac}} f_3(k_{ac}\, l_{ac}) + \frac{1}{l_{ad}} f_3(k_{ad}\, l_{ad}) \right]$$

$k_{ab}\, l_{ab} = 0{,}6 \cdot 6 = 3{,}6$ $\qquad f_3(3{,}6) = 0{,}42847$

$k_{ac}\, l_{ac} = 0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2$ $\qquad f_3(1{,}2) = 0{,}99471$

$k_{ad}\, l_{ad} = 0{,}5 \cdot 4 = 2{,}0$ $\qquad f_3(2{,}0) = 0{,}96079$

Prin urmare

$$r_{11} = 4\,EI \left[\frac{1}{6} 0{,}42847 + \frac{1}{4} 0{,}99471 + \frac{1}{4} 0{,}96079 \right] = 2{,}24114\,EI$$

Valoarea R_{1p} se determină după datele tabloului 13, cazul 1.

$$R_{1p} = M_0 = \frac{P}{0{,}6} \frac{9{,}60477 \cdot 0{,}984\,16 - 9{,}36399 \cdot 1{,}66823}{9{,}60477^2 - 8{,}92147 \cdot 9{,}36399} = -1{,}178\,P.$$

Prin urmare

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = \frac{1{,}178\,P}{2{,}241\,EI} = 0{,}525\,\frac{P}{EI}$$

Trecem la construirea diagramei momentelor

Bara ab: $k_{ab} = 0{,}6$; $\qquad k_{ab}\, l_{ab} = 3{,}6$

Condițiile inițiale la capătul din stânga al barei sunt:

$$y_0 = 0; \qquad y_0' = -Z_1 = -0{,}525\,\frac{P}{EI}$$

Momentul.

$$M_0 = \overline{M}_{11} Z_1 + M_{1p}$$

In această expresie:

$$\overline{M}_{11} = \frac{4\,EI}{6} \cdot 0{,}42847 = 0{,}286\,EI\,; \quad M_{1p} = R_{1p} = -1{,}178\,P$$

Atunci

$$M_0 = 0{,}286\,EI \cdot 0{,}525\,\frac{P}{EI} - 1{,}178\,P = -1{,}028\,P$$

Forţa tăietoare

$$Q_0 = \overline{Q}_{11} Z_1 + Q_{1p}$$

Din tabloul 12, cazul 1, avem

$$\overline{Q}_{11} = -\frac{6\,EI}{6^2} \cdot f_4(3,6) = -\frac{EI}{6} \cdot \frac{(kl)^2 (C_{kl} A_{kl} - B^2_{kl})}{6 (C^2_{kl} - B_{kl} D_{kl})}$$

sau în valori numerice

$$\overline{Q}_{11} = -\frac{EI}{36} \frac{3{,}6^2 (19{,}60477 \cdot 8{,}70801 - 8{,}92147^2)}{19{,}60477^2 - 8{,}92147 \cdot 9{,}36399} = 0{,}1672\,EI$$

Din tabloul 13, cazul 1, avem

$$Q_{1p} = Q_0 = P \frac{C_{kl} C_{k\,0{,}5l} - B_{kl} D_{k\,0{,}5l}}{C^2_{kl} - B_{kl} D_{kl}}$$

sau în valori numerice:

$$Q_{1p} = P \cdot \frac{19{,}60477 \cdot 1{,}66823 - 8{,}91147 \cdot 0{,}98416}{19{,}60477^2 - 8{,}92147 \cdot 9{,}36399} = 0{,}831\,P$$

Prin urmare

$$Q_0 = 0{,}1672\,EI\,\frac{0{,}525}{EI} + 0{,}831\,P = 0{,}919\,P$$

Formulele de calcul în porţiunea din stânga	*Termenul suplimentar pentru formulele din porţiunea din dreapta*
Ecuaţia liniei elastice	
$y = -\frac{0{,}525\,P}{0{,}6\,EI} B_{kx} - \frac{1{,}028\,P}{0{,}6^2\,EI} C_{kx} + \frac{0{,}919\,P}{0{,}6^3\,EI} D_{kx}$	$-\frac{P}{0{,}6^3\,EI} D_k \left(x - \frac{1}{2} l\right)$
după simplificare	
$EIy = -0{,}875\,PB_{kx} - 2{,}86\,PC_{kx} + 4{,}254\,PD_{kx}$	$-4{,}63\,PD_k \left(x - \frac{1}{2} l\right)$
faţă de aceasta[1]	
$EIy' = 0{,}6\,[-0{,}875\,PA_{kx} - 2{,}86\,PB_{kx} + 4\,254\,PC_{kx}]$	$-4{,}63\,PC_k \left(x - \frac{1}{2} l\right)$
Ecuaţia momentelor acestei bare va fi	
$M = 0\,6^2\,[-0{,}875\,PD_{kx} - 2{,}86\,PA_{kx} + 4{,}254\,PB_{kx}]$	$-4\,63\,PB_k \left(x - \frac{1}{2} l\right)$
sau	
$M = -0{,}315\,PD_{kx} - 1{,}028\,PA_{kx} + 1{,}532\,PB_{kx}$	$-1{,}666\,PB_k \left(x - \frac{1}{2} l\right)$

[1]) Verificăm condiţiile la capătul din dreapta pentru $x = l$

$$EIy_l = -0{,}875\,P \cdot 3{,}92147 - 2{,}86\,P \cdot 9{,}60477 + 4{,}254\,P \cdot 9{,}36399 - 4{,}63\,P \cdot 0{,}98416 = 39\,85\,P - 39{,}86\,P \approx 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul acestei ecuații a momentelor, calculăm ordonatele diagramei momentelor în porțiunea din stânga $(0<x<3)$:

$$x=0 \qquad kx=0 \qquad M_0=-1{,}028\cdot 1\cdot P=1{,}028\,P$$

$$x=1; \quad kx=0{,}6; \quad M_1=[-0{,}315\cdot 0{,}0361-1{,}028\cdot 1{,}0054+1{,}532\cdot 0{,}6006]\,P=-0{,}128\,P$$

$$x=2; \quad kx=1{,}2; \quad M_2=[-0{,}315\cdot 0{,}2887-1{,}028\cdot 1{,}0865+1{,}532\cdot 1{,}2208]\,P=0{,}662\,P$$

$$x=3; \quad kx=1{,}8; \quad M_3=[-0{,}315\cdot 0{,}9842-1{,}0\ 8\cdot 1{,}4401+1{,}532\cdot 1{,}958]\,P=1{,}196\,P$$

în porțiunea din dreapta $(3<x<6)$:

$$x=4; \quad kx=2{,}4; \quad M_4=[-0{,}315\cdot 2{,}3954-1{,}028\cdot 2{,}4098+1{,}532\cdot 3\,071-1{,}666\cdot 0{,}600]\,P=0{,}468\,P$$

$$x=5; \quad kx=3{,}0; \quad M_5=[-0{,}315\cdot 4{,}9384-1{,}028\cdot 4{,}5388+1{,}532\cdot 5{,}0795-1{,}666\cdot 1{,}221]\,P=0{,}482\,P$$

$$x=6; \quad kx=3{,}6; \quad M_6=[-0{,}315\cdot 9{,}3640-1{,}028\cdot 8{,}708+1{,}532\cdot 8{,}9215-1{,}666\cdot 1{,}958]\,P=1{,}51\,P$$

Bara da: $k=0{,}5$; $kl=2\,0$.

Condițiile inițiale la capătul din stânga *d*:

$$y_0=0; \qquad y_0'=0$$

Atunci după tabloul 12, cazul 2 și pentru valoarea lui $Z_1=0{,}525\,\frac{P}{EI}$, avem

$$M_0=\frac{2EI}{4}\,f_5(2)\cdot\frac{0{,}525\cdot P}{EI}=$$

și

$$=\frac{1}{2}\cdot 1{,}05884\cdot 0{,}525\ \mathrm{P}=0{,}278\,P$$

$$Q_0=-\frac{6\,EI}{4^2}\,f_6(2)\cdot 0.525\,\frac{P}{EI}=-\frac{6}{16}\cdot 1{,}08573\cdot 0{,}525=-0{,}214\,P$$

Ecuația liniei elastice

$$y=\frac{0{,}278\,P}{0{,}5^2EI}\,C_{kx}-\frac{0{,}214\,P}{0{,}5^3\,EI}\cdot D_{kx}=(1{,}112\,C_{kx}-1{,}712D_{kx})\ \frac{P}{EI}$$

de unde

$$y'=(0{,}556\,B_{kx}-0{,}856\,C_{kx})\,\frac{P}{EI}$$

Vom face acum verificarea pentru cazul $kl=2$

$$y_1=(+1{,}112\cdot 2{,}08917-1{,}712\cdot 1{,}35828)\,\frac{P}{EI}=(2{,}32-2{,}325)\,\frac{P}{EI}=0$$

$$y_1'=(0{,}556\cdot 2{,}26308-0{,}856\cdot 2{,}08917)\,\frac{P}{EI}=-\frac{0{,}526}{EI}\,P$$

$$\left(\text{în loc de}\ \frac{0{,}525\,P}{EI}\right)$$

Ecuația momentelor în bară ne dă

$$M_{kx}=0{,}5\ (0{,}556\,A_{kx}-0{,}856\ B_{kx})\,P$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul acestei ecuații se calculează momentele

pentru $kx = 0$; $M_0 = 0{,}278\ P$;

pentru $kx = k\frac{l}{2} = 1$; $M_{kl/2} = -0{,}142\ P$;

pentru $kx = kl = 2$; $M_l = -0{,}505\ P$

Bara ca. Condițiile inițiale la capătul c și toate calculele precedente sunt aceleași ca pentru bara *da*:

$$y_0 = 0; \qquad y'_0 = 0;$$

$$M_0 = \frac{2EI}{4} \cdot 1{,}00741 \cdot 0{,}525 \frac{P}{EI} = 0{,}2645\ P;$$

$$Q_0 = -\frac{6EI}{4^2} \cdot 1{,}01074 \cdot 0{,}525 \frac{P}{EI} = -0{,}199\ P$$

Ecuația momentelor este:

$$M_{kx} = 0{,}2646\ PA_{kx} - 0{,}6633\ P \cdot B_{kx}$$

pentru $kx = 0$; $M_0 = 0{,}2646\ P \cdot$

pentru $kx = k\frac{1}{2}l = 0{,}6$; $M_{kl/2} = -0{,}132\ P \cdot$

pentru $kx = kl = 1{,}2$; $M_{kl} = -0{,}5215\ P$

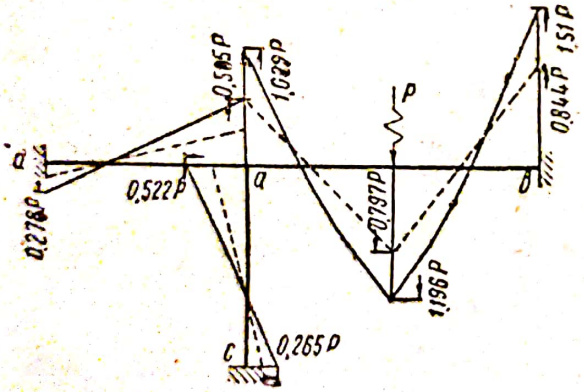


Fig. 75

In fig. 75 este reprezentată diagrama completă a momentelor dinamice. Verificăm echilibrul momentelor în nodul dela mijlocul cadrului: (fig. 76).

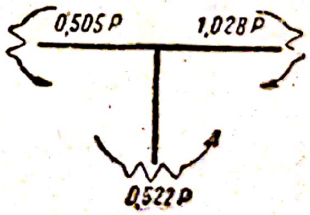


Fig. 76

$$(-0{,}505 - 0{,}522 + 1{,}028) \cdot P = 0{,}001\ P \approx 0$$

In fig. 75 este reprezentată cu linii punctate diagrama momentelor statice.

Exemplul 16. *Să se determine frecvențele oscilațiilor proprii ale cadrului reprezentat în fig. 77, cunoscând că* $EI = 4 \cdot 10^{10}$ *kg/cm² și că greutatea fiecărui element este de 8 t.*

La determinarea formelor simetrice ale oscilațiilor ne vom servi de cupluri de necunoscute, considerând că Z_1 provoacă rotirea simultană a nodurilor; rotirea nodului din stânga fiind în sensul mersului acelor unui ceasornic, iar a celui din dreapta în sens contrar.

Ecuația de condiție a oscilațiilor libere este:

$$r_{11} Z_1 = 0$$

Conform tabloului 12, cazul 2

$$\frac{r_{11}}{2} = \frac{4\,EI}{6} f_3(k_{ab} l_{ab}) + \frac{4\,EI}{6} f_3(k_{bc} l_{bc}) - \frac{2\,EI}{6} f_5(k_{bc} l_{bc})$$

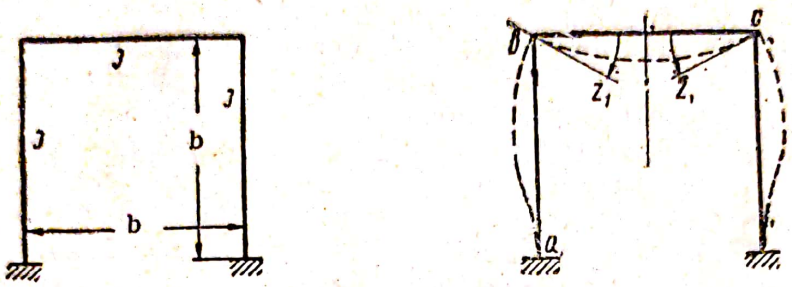


Fig. 77

Intrucât barele sunt identice $k_{ab}\, l_{ab} = k_{bc} l_{bc} = kl$

Pentru că $Z_1 \neq 0$, este necesar ca $r_{11} = 0$, adică

$$\frac{4\,EI}{6} f_3(kl) + \frac{4\,EI}{6} f_3(kl) - \frac{2\,EI}{6} f_5(kl) = 0$$

sau

$$4 f_3(kl) - f_5(kl) = 0.$$

Substituind expresiile $f_3(kl)$ și $f_5(kl)$ din tabloul 12, obținem ecuația frecvențelor sub următoarea formă :

$$\frac{kl\,(B_{kl} C_{kl} - A_{kl} D_{kl})}{1 - \operatorname{ch} kl \cos kl} - \frac{\frac{1}{2} kl\, D_{kl}}{1 - \operatorname{ch} kl \cos kl} = 0$$

și în forma definitivă, după transformări

$$B_{kl} C_{kl} - A_{kl} D_{kl} - \frac{1}{2} D_{kl} = 0$$

Substituind în această formulă funcțiunile hiperbolice în locul valorilor notate cu litere, obținem

$$+ 2 \operatorname{ch} kl \sin kl - 2 \operatorname{sh} kl \cos kl - \operatorname{sh} kl + \sin kl = 0$$

Primele două rădăcini ale acestei ecuații sunt

$$k_1 l_1 = 3{,}56\,; \qquad k_2 l_2 = 7{,}43$$

In mod corespunzător se vor determina frecvențele cu ajutorul formulei (133) care, pentru cadrul considerat se reduce la următoarea formă :

$$\varphi = \frac{(kl)^2}{l^2} \sqrt{\frac{gEI}{q}} = \frac{(kl)^2}{600} \cdot \sqrt{\frac{1\,000 \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 600}{8\,000}} = 4{,}81\,(kl)^2\ \text{sec}^{-1}$$

De aci se determină cele două frecvențe

$$\varphi_1 = 4{,}81 \cdot 3{,}56^2 = 60{,}7\ \text{sec}^{-1}$$
$$\varphi_2 = 4{,}81 \cdot 7{,}43^2 = 265{,}5\ \text{sec}^{-1}.$$

B. *CALCULUL DINAMIC AL ARCELOR*

§ 28. Particularităţile calculului arcelor

La determinarea frecvenţelor oscilaţiilor proprii ale arcelor, precum şi la calculul lor la forţe oscilatorii, este necesar să ţinem seama de particularităţile care deosebesc sistemele în arc de acelea în cadre. La calculele statice obişnuite ale arcelor, în special la arcele cu secţiune variabilă, arcul se înlocueşte cu o bară cu contur poligonal (frânt). La studiul oscilaţiilor această înlocuire schimbă problema faţă de calculele statice obişnuite.

Să înlocuim de exemplu, un arc circular având trei mase concentrate (fig. 78 a) cu trei feluri de bare frânte, după cum se arată în fig. 78 b, c şi d. Arcul cu trei mase are şase grade de libertate, pe când bara frântă după varianta din fig. 78 b, are două grade; după varianta din fig. 78 c — patru grade; iar după varianta din fig. 58 d — şase grade de libertate. Astfel, bara frântă, echivalentă după proprietăţile sale statice cu o bară curbă, poate să nu fie echivalentă cu aceasta din punct de vedere dinamic.

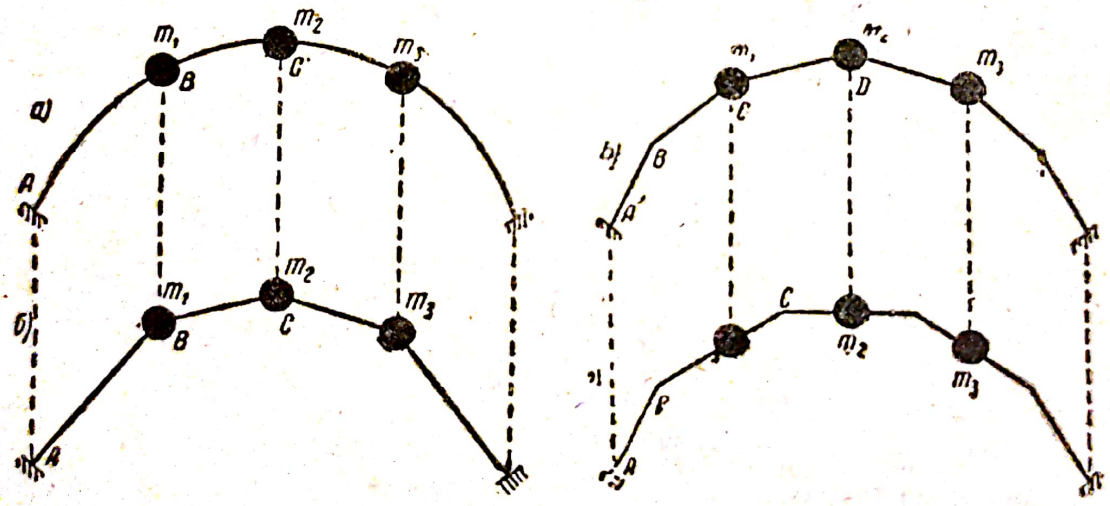


Fig. 78

Această lipsă de echivalenţă constă mai întâi în aceea că numărul frecvenţelor oscilaţiilor produse de mase concentrate, prin urmare şi numărul formelor de oscilaţii, poate fi diferit pentru arce şi pentru barele frânte.

Având însă în vedere că pentru scopurile practice este nevoie să calculăm numai prima frecvenţă (minimă), se poate admite înlocuirea arcului cu o bară frântă, întrucât frecvenţele minime pentru ambele sisteme diferă, în general, foarte puţin una de cealaltă. Pentru a lămuri cum variază frecvenţa la înlocuirea unei bare curbe cu o bară frântă, să examinăm o bară circulară cu o singură masă concentrată, având două grade de libertate (fig. 79 a) precum şi o bară frântă, astfel cum se arată în fig. 79 b, cu un singur grad de libertate.

Pentru cazul 1, după cum se vede din fig. 80 a și b avem:

$$\delta_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{EI} (0{,}293\ R \sin \alpha_1)^2\ R d\alpha_1 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{EI} [0{,}707\ (1 - \cos \alpha_2)\ R]^2\ R d\alpha_2 =$$

$$= 0{,}0858 \frac{R^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \alpha_1 d\alpha_1 + \frac{0{,}5 R^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos \alpha_2)^2\ d\alpha_2 = \frac{0{,}01925\ R^3}{EI};$$

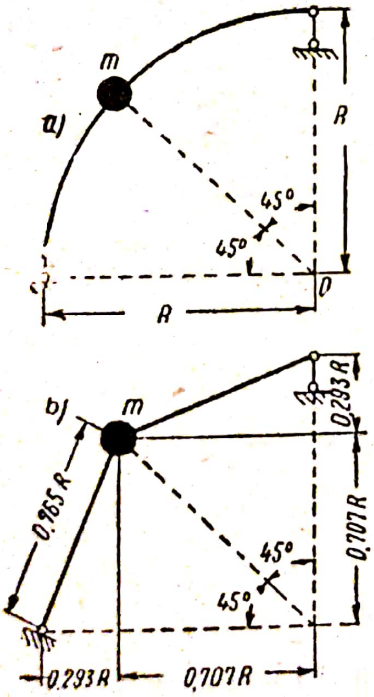


Fig. 79

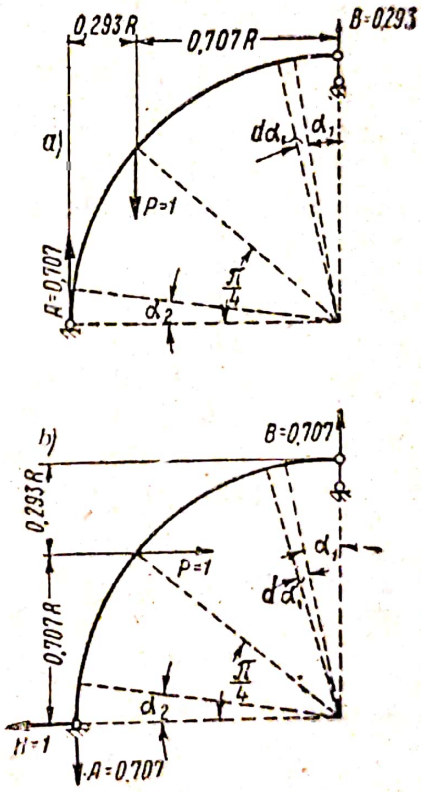


Fig. 80

$$\delta_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{EI} (0{,}707\ R \sin \alpha_1)^2\ R d\alpha_1 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{EI} [R \sin \alpha_2 - 0{,}707\ R(1 - \cos \alpha_2)]^2\ R d\alpha_2 =$$

$$= \frac{0{,}5\ R^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \alpha_1 d\alpha_1 + \frac{R^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \alpha_2\ d\alpha_2 + \frac{0{,}5 R^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos \alpha_2)^2\ d\alpha_2 -$$

$$-2\frac{0{,}707\,R^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos\alpha_2)\sin\alpha_2\,d\alpha_2=0{,}1604\frac{R^3}{EI};$$

$$\delta_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{EI}0{,}707\cdot0{,}293\sin^2\alpha_1R^3\,d\alpha_1+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{EI}[R\sin\alpha_2-0{,}707\,R\,(1-\cos\alpha_2)]\times$$

$$\times\,0{,}707\,R\,(1-\cos\alpha_2)\,Rd\alpha_2=\frac{1}{EI}\,0{,}2072\,R^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\alpha_1d\alpha_1+$$

$$+\frac{0{,}707}{EI}R^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\alpha_2\,(1-\cos\alpha_2)\,d\alpha_2-\frac{0{,}5}{EI}R^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos\alpha_2)^2\,d\alpha_2=0{,}0530\frac{R^3}{EI}.$$

Pentru aceste valori ale deplasărilor ecuaţia seculară se transformă astfel:

$$\begin{vmatrix}(0{,}0193-\lambda) & 0{,}0530\\ 0{,}0530 & (0{,}1604-\lambda)\end{vmatrix}=0$$

în care

$$\lambda=\frac{EI}{R^3m\varphi^2}.$$

Rezolvarea ecuaţiei ne dă

$$\lambda_{max}=0{,}0898+\sqrt{0{,}0705^2+0{,}0530^2}=0{,}178.$$

Prin urmare

$$\varphi_{min}=\sqrt{\frac{EI}{\lambda_{max}\,mR^3}}=2{,}37\sqrt{\frac{EI}{mR^3}}.$$

Pentru cazul al doilea din fig. 81, găsim:

$$EI\delta_{11}=2\frac{0{,}765\,R\,0{,}541\,R}{2}\cdot\frac{2}{3}0{,}541\,R=0{,}149\,R^3.$$

Frecvenţa oscilatorie va fi egală cu

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{m\delta_{11}}}=2{,}59\sqrt{\frac{EI}{mR^3}}.$$

Comparând frecvenţele pentru aceste două cazuri, observăm că pentru bara frântă frecvenţa este cu 9% mai mare decât pentru bara curbă.

Dacă o bară curbă este înlocuită cu o bară cu un contur poligonal cu mai multe laturi, atunci diferenţa între frecvenţe descreşte în mod pronunţat. Astfel, pentru determinarea frecvenţei minime se poate înlocui o bară curbă cu una frântă.

Considerăm acum o bară frântă cu o singură masă, astfel încât direcţia deplasării masei este cunoscută mai dinainte.

Scanned with OKEN Scanner

Într'un sistem cu două mase, reprezentat în fig. 82, deplasările masei m_1 se vor produce în direcţia *I—I*, adică ea va efectua o rotire în jurul punctului *A* cu raza egală cu lungimea barei *A—B*. La oscilaţii mici se poate considera că aceste deplasări se produc pe linia dreaptă *1—1*. A doua masă m_2 are o mişcare ceva mai complicată. Astfel, de exemplu, când masa m_1 ocupă poziţia ei iniţială, masa m_2 se deplasează în direcţia *II—II*. Insă, în afară de aceasta, masa m_2 se deplasează în direcţie perpendiculară pe axa *II—II*, datorită oscilaţiilor masei m_1.

In esenţă, sistemul reprezentat în fig. 82, are două grade de libertate, întrucât prin deplasarea maselor m_1 şi m_2 se determină complet starea deformată a barei *ABC*. Insă determinarea oscilaţiilor, a frecvenţei precum şi calculul la sarcini dinamice sunt destul de dificile.

Pentru sistemul considerat şi pentru sistemele similare se recomandă ca să se facă calculul ca şi pentru un sistem cu trei grade de libertate. Cu toate că în acest caz volumul calculelor este oarecum sporit, acest neajuns se compensează prin simplitatea compunerii ecuaţiilor echilibrului dinamic.

In § 23 s'a expus rezolvarea aproximativă a problemei oscilaţiilor unei bare frânte (fig. 53) ca a unui sistem cu două grade de libertate. După cum s'a arătat, aproximaţia în rezolvare constă în neglijarea deplasării masei m_2 (fig. 82) în direcţia barei *BC*. Să examinăm acelaş exemplu, procedând la rezolvare ca şi pentru un sistem cu trei grade de libertate, adică ţinând seama de deplasările masei în lungul barei *BC*. In fig. 83 sunt reprezentate diagramele momentelor provocate de forţele unitare acţionând în direcţia deplasărilor căutate, care, — după datele din figură, — au următoarele valori:

$$EI\delta_{11} = 55{,}58;\ EI\delta_{22} = 43{,}70;\ EI\delta_{33} = 4{,}36;$$
$$EI\delta_{12} = 44{,}36;\ EI\delta_{13} = -15{,}53;\ EI\delta_{23} = -12{,}38.$$

Ecuaţia seculară pentru determinarea frecvenţei oscilaţiilor proprii se aduce la următoarea formă:

$$\begin{vmatrix} 55{,}58-\lambda & 44{,}36 & -15{,}53 \\ 44{,}36 & 43{,}70-\lambda & -12{,}38 \\ -15{,}53 & -12{,}38 & 4{,}36-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (134)$$

în care $\lambda = \dfrac{EI}{m\varphi^2}$.

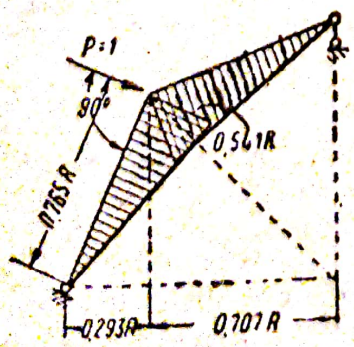


Fig. 81

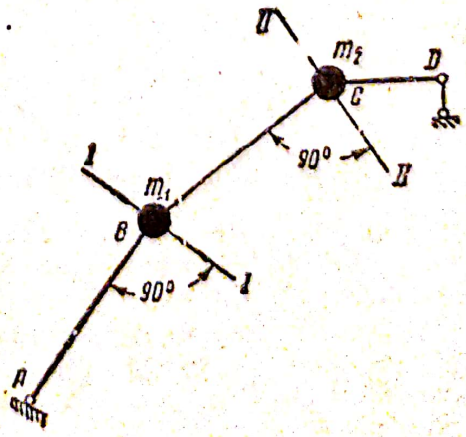


Fig. 82

Se poate observa uşor, că pentru $\lambda = 0$ determinantul (a) este egal cu zero, întrucât rândul al treilea diferă de primul numai printr'un factor constant[1], adică a doua şi a treia ecuaţie a echilibrului dinamic depind una de cealaltă.

Astfel, una din rădăcinile ecuaţiei seculare fiind egală cu zero, rămâne să se determine numai două valori numerice ale rădăcinilor. Aceasta este încă o dovadă că sistemul dat are numai două grade de libertate. Insă dacă din ecuaţia (134) găsim două frecvenţe, acestea nu vor mai coincide cu cele obţinute mai înainte la § 23.

Intr'adevăr, rezolvând ecuaţia (134) obţinem:

$$\lambda_1 = 97{,}55, \quad \lambda_2 = 6{,}19 \quad \text{şi} \quad \lambda_3 = 0.$$

Prin urmare, frecvenţele oscilaţiilor vor avea valorile următoare:

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{97{,}55}}\sqrt{\frac{EI}{m}} = 0{,}101\sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{6{,}19}}\sqrt{\frac{EI}{m}} = 0{,}402\sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

In exemplul analizat în § 23, frecvenţele pentru aceeaşi bară au fost:

$$\varphi_1 = 0{,}104\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

şi

$$\varphi_2 = 0{,}459\sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Diferenţa între valorile primelor frecvenţe minime este destul de mică; pentru frecvenţele următoare această diferenţă reprezintă 13%. In cazul de faţă, variaţia mică a primei frecvenţe se explică prin diferenţa neînsemnată a unghiurilor de înclinare ale barelor AB şi BC.

Calculele de mai sus arată că, *pentru arcele pleoştite se obţine o exactitate suficientă la calculul valorii primei frecvenţe proprii, dacă se admite că masele fixate pe axă se deplasează în direcţie perpendiculară pe axa arcului.* A doua, a treia şi frecvenţele următoare diferă în acest caz destul de mult de cele reale, însă aceasta nu are o însemnătate practică, întrucât la calcule este important să cunoaştem numai valoarea exactă a frecvenţei minime. In ce priveşte calculul sistemelor supuse la sarcini oscilatorii, la care este greu să stabilim direcţiile principale ale deplasărilor diferitelor mase, calculul urmează a se face ca şi pentru sistemele cu mai multe grade de libertate.

Să examinăm din nou exemplul reprezentat în fig. 53, care a fost rezolvat în mod aproximativ în § 23, fără să se ţină seama de deplasarea masei m_c în direcţia barei BC. Pentru ca să ţinem seamă de această deplasare, vom considera sistemul dat ca un sistem cu trei grade de libertate. Valorile deplasărilor sunt calculate mai sus. Spre

[1] Aceasta rezultă din confruntarea contururilor diagramelor lui $\overline{M}_1$ şi $\overline{M}_3$ (fig. 83).

Scanned with OKEN Scanner

deosebire de cele arătate la § 23 pt. 2, ecuațiile de condiție se vor scrie astfel:

$$\left(55{,}58 - \frac{1}{k^2}\right) Z_1 + 44{,}36\, Z_2 - 15{,}53\, Z_3 + 51{,}67 = 0;$$

$$44{,}36\, Z_1 + \left(43{,}70 - \frac{1}{k^2}\right) Z_2 - 12{,}38\, Z_3 + 34{,}60 = 0;$$

$$-15{,}53\, Z_1 - 12{,}38\, Z_2 + \left(4{,}36 - \frac{1}{k^2}\right) Z_3 - 14{,}47 = 0.$$

Valoarea $\Delta_{3p} = -14{,}47$ este calculată după diagrama lui $\overline{M}_3$ (fig. 83) și a lui $\overline{M}_p$ (fig. 84).

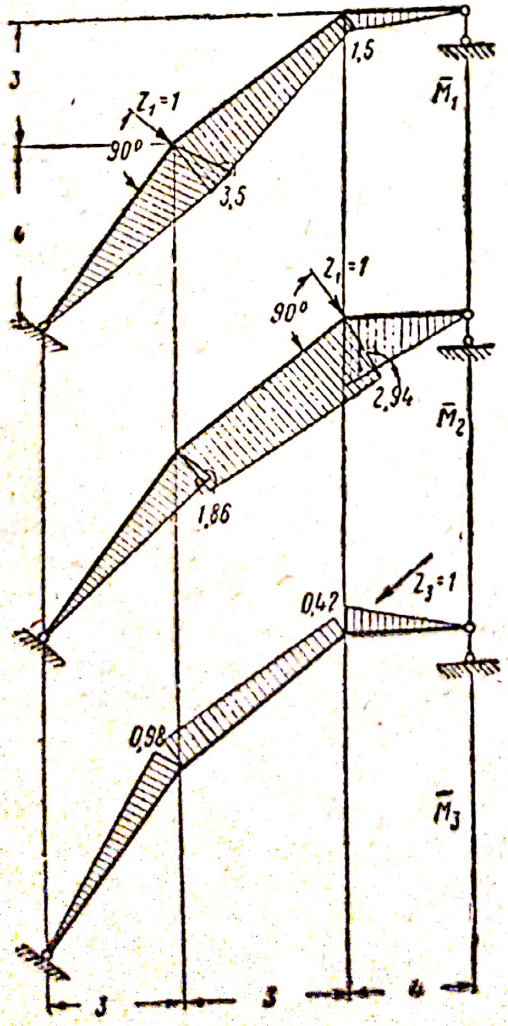


Fig. 83

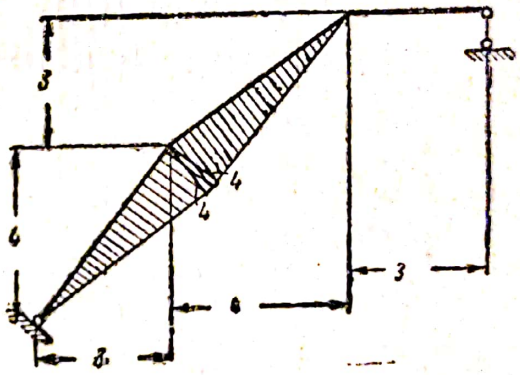


Fig. 84

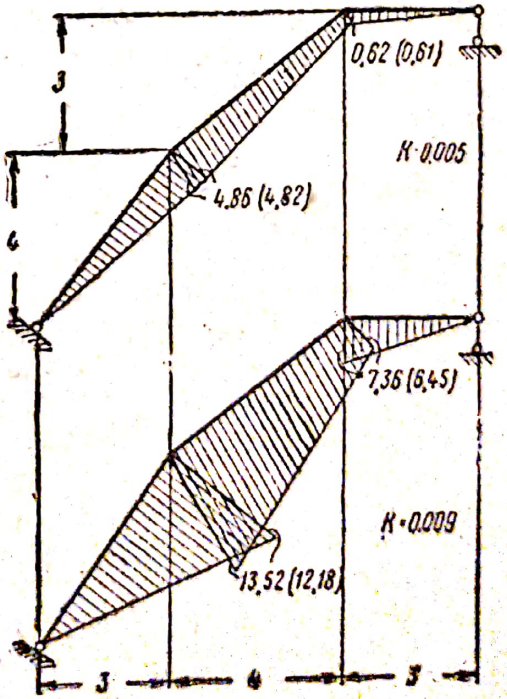


Fig. 85

Vom admite $k = 0{,}05$, atunci

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{0{,}05^2} = 400$$

iar ecuaţiile de condiţie vor căpăta următorul aspect:

$$\begin{aligned} -344{,}42\,Z_1 + 44{,}36\,Z_2 - 15{,}53\,Z_3 + 51{,}67 &= 0;\\ 44{,}36\,Z_1 - 356{,}3\,Z_2 - 12{,}38\,Z_3 + 34{,}60 &= 0;\\ -15{,}53\,Z_1 - 12{,}38\,Z_2 - 395{,}64\,Z_3 - 14{,}47 &= 0. \end{aligned}$$

Rezolvând aceste ecuaţii cu trei necunoscute, obţinem:

$$Z_1 = 0{,}168; \quad Z_2 = 0{,}120; \quad Z_3 = 0{,}052.$$

Dacă admitem $k = 0{,}09$, valorile forţelor de inerţie se vor modifica şi vor fi egale cu:

$$Z_1 = 1{,}92; \quad Z_2 = 1{,}52; \quad Z_3 = -0{,}054.$$

Pentru aceste două cazuri sunt reprezentate în fig. 85 două diagrame ale momentelor dinamice (116); cifrele din paranteză indică valorile momentelor calculate aproximativ pentru acelaşi sistem în § 23.

După cum se vede, diferenţa între valorile exacte şi cele aproximative nu este prea mare.

Calculele efectuate arată că pentru arcele pleoştite, calculul la acţiunea sarcinilor dinamice oscilatorii se poate face ţinând seama numai de deplasările maselor în direcţii radiale.

§ 29. Exemple de calcul al arcelor la sarcini oscilatorii

Fig. 86 a, înfăţişează un arc parabolic cu trei articulaţii având trei mase egale. Inlocuind arcul cu o bară frântă, după cum se arată în fig. 86 b, vom obţine un sistem cu două grade de libertate. Din cauza calculelor complicate ale forţelor de inerţie ale celor trei mase după două deplasări, este mai judicios să rezolvăm sistemul dat ca având patru necunoscute (ca un sistem cu patru grade de libertate).

La determinarea frecvenţelor oscilaţiilor proprii, vom considera separat formele de oscilaţii simetrice şi antisimetrice. Direcţia mişcărilor oscilatorii ale maselor corespunde cu ambele forme de oscilaţii indicate cu linii punctate în fig. 86 b. Diagramele momentelor produse de forţele unitare, aplicate după direcţia de deplasare a maselor, sunt reprezentate în fig. 87. Deplasările calculate după aceste diagrame pentru grupul de necunoscute simetrice au următoarele valori:

$$EI\delta_{11} = 9{,}5; \qquad EI\delta_{22} = 6{,}08; \qquad EI\delta_{12} = 7{,}60.$$

Intrucât prima diagramă corespunde cuplului necunoscut, ecuaţia secular̆ă se va scrie sub următoarea formă:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{2}9{,}5 - \lambda\right) & -7{,}60 \\ -\frac{1}{2}7{,}60 & (6{,}08 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Este uşor de observat că pentru $\lambda = 0$ determinantul este egal cu zero, deoarece raportul termenilor din primul rând către cei din rândul al doilea este constant. Astfel, obţinem un singur număr caracteristic :

$$\lambda = 10{,}83.$$

Prin urmare, frecvenţa oscilaţiilor corespunzătoare formei simetrice a deformaţiei este :

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{10{,}83}} \sqrt{\frac{\overline{EI}}{m}} = 0{,}304 \sqrt{\frac{\overline{EI}}{m}}$$

Pentru grupul de necunoscute antisimetric (fig. 87), deplasările se determină prin următoarele valori :

$$EI\delta_{33} = 38\,; \qquad EI\delta_{44} = 1{,}52\,; \qquad EI\delta_{34} = 7{,}60.$$

Intrucât diagrama $\overline{M}_3$ se referă la cuplul necunoscut, ecuaţia seculară se va scrie astfel :

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{2}38 - \lambda\right) & -7{,}60 \\ -\frac{1}{2}7.60 & (1{,}52 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Pentru acelaş motiv ca şi la oscilaţiile simetrice, ecuaţia are o singură rădăcină :

$$\lambda = 20{,}52$$

Astfel, pentru sistemul dat avem două frecvenţe, ceea ce corespunde cu numărul gradelor lui de libertate (fig. 86 b).

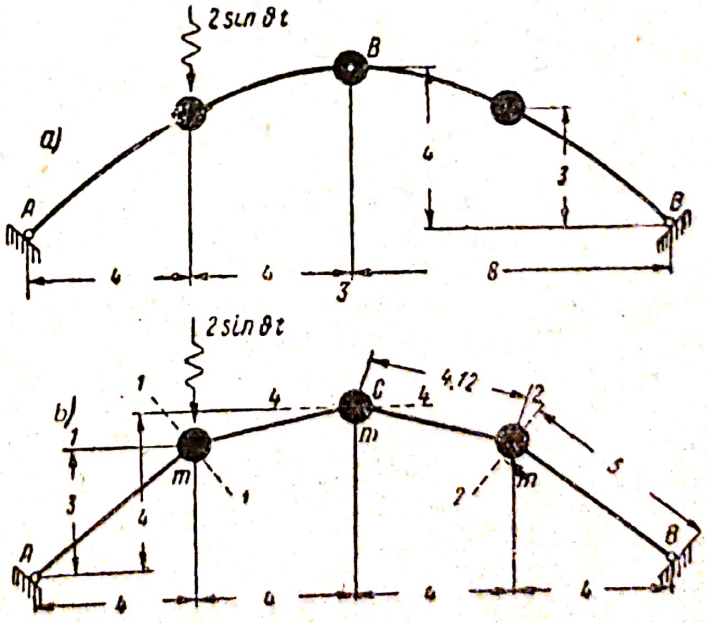


Fig. 83

Din acest exemplu, rezultă că frecvenţa minimă corespunde formei de oscilaţii antisimetrice. Aceasta ne îndreptăţeşte să tragem concluzia că *pentru arce, încărcarea oscilatorie nesimetrică este mai periculoasă, întrucât dacă încărcarea este simetrică, nu se produce prima rezonanţă.*

Vom studia acum acţiunea sarcinilor pulsatorii, reprezentate în fig. 86 a. Diagrama de încărcare provenită din amplitudinea forţei pulsatorii este înfăţişată în fig. 88.

Deplasările provenite din încărcarea Δ_p se determină prin procedeele obișnuite după diagrama de încărcare a momentelor M_p și după diagramele lui $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$, și $\overline{M}_4$ (fig. 87):

$$EI\Delta_{1p} = 7{,}60\,; \qquad EI\Delta_{2p} = -6{,}08$$
$$EI\Delta_{3p} = 30{,}40\,; \qquad EI\Delta_{4p} = 6{,}08$$

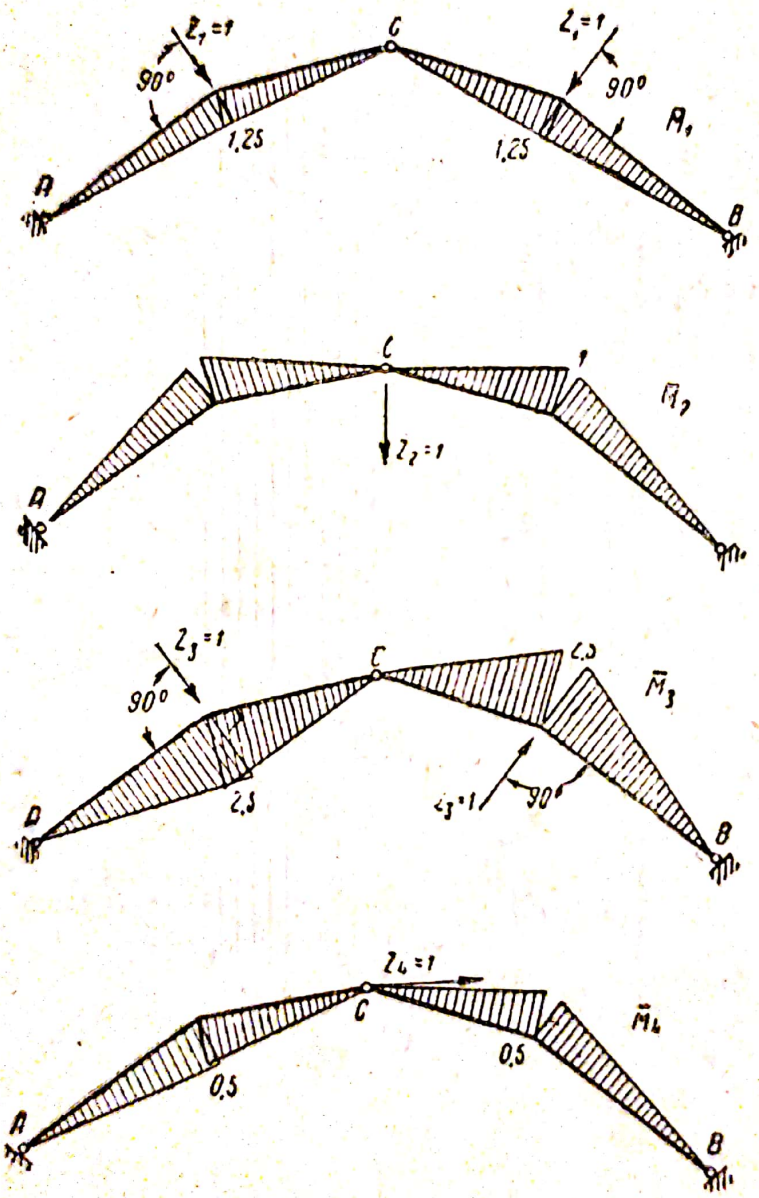


Fig. 87

Admițând $\vartheta = k\sqrt{\dfrac{EI}{m}}$ sau $k = \vartheta\sqrt{\dfrac{m}{EI}}$, calculăm deplasările principale:

$$\delta_{11}^{*} = \delta_{11} - \frac{2}{m\vartheta^2} = \frac{1}{EI}\left(9{,}5 - \frac{2}{k^2}\right)$$
$$\delta_{33}^{*} = \delta_{33} - \frac{2}{m\vartheta^2} = \frac{1}{EI}\left(38 - \frac{2}{k^2}\right)$$

$$\delta_{22}^{*} = \delta_{22} - \frac{1}{m\vartheta^2} = \frac{1}{EI}\left(6{,}08 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$\delta_{44}^{*} = \delta_{44} - \frac{1}{m\vartheta^2} = \frac{1}{EI}\left(1{,}52 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Tinând seama de aceste valori, ecuaţiile de condiţie se vor scrie sub forma următoare:

a) pentru grupul simetric

$$\left(9{,}5 - \frac{2}{k^2}\right) Z_1 - 7{,}60\, Z_2 + 7{,}60 = 0$$

$$-7.60\, Z_1 + \left(6{,}08 - \frac{1}{k^2}\right) Z_2 - 6{,}08 = 0$$

b) pentru grupul antisimetric

$$\left(38 - \frac{2}{k^2}\right) Z_3 + 7{,}60\, Z_4 + 30{,}4 = 0$$

$$7{,}60\, Z_3 + \left(1{,}52 - \frac{1}{k^2}\right) Z_4 + 6{,}08 = 0$$

In tabloul 14 sunt indicate valorile forţelor de inerţie Z_1, Z_2, Z_3 şi Z_4 pentru diferite valori ale lui k. Ţinând seama de aceste valori, în fig. 89 sunt reprezentate diagramele momentelor dinamice, calculate cu ajutorul formulei (116).

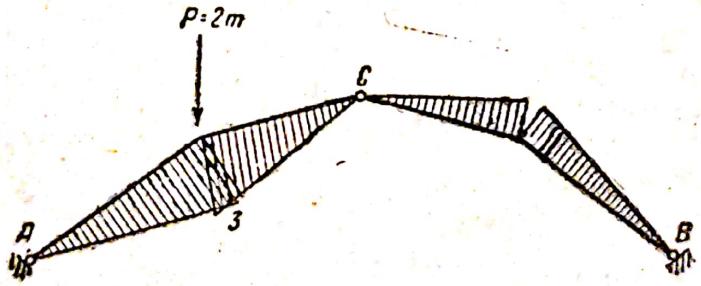


Fig. 88

Tabloul 14

k	0,10	0,20	0,221 prima rezonanţă	0,25	0,28	0,304 a doua rezonanţă	0,32	1,0
Z_1	0,04	0,22	∞	0,73	1,97	∞	4,10	4,35
Z_2	−0,07	−0,18	∞	−1,17	−3,15	∞	6,55	5,32
Z_3	0,19	1,97	∞	−3,56	−1,95	∞	−2,33	−0,81
Z_4	0,08	0,90	∞	−1,34	−0,74	∞	1,58	−0,16

Scanned with OKEN Scanner

Din fig. 89 se vede că în momentul apropierii de rezonanţă, ordonatele diagramei M cresc considerabil. Schimbarea semnului momentelor, după trecerea dincolo de rezonanţă, indică decalarea fazei oscilaţiilor forţate faţă de încărcarea oscilatorie.

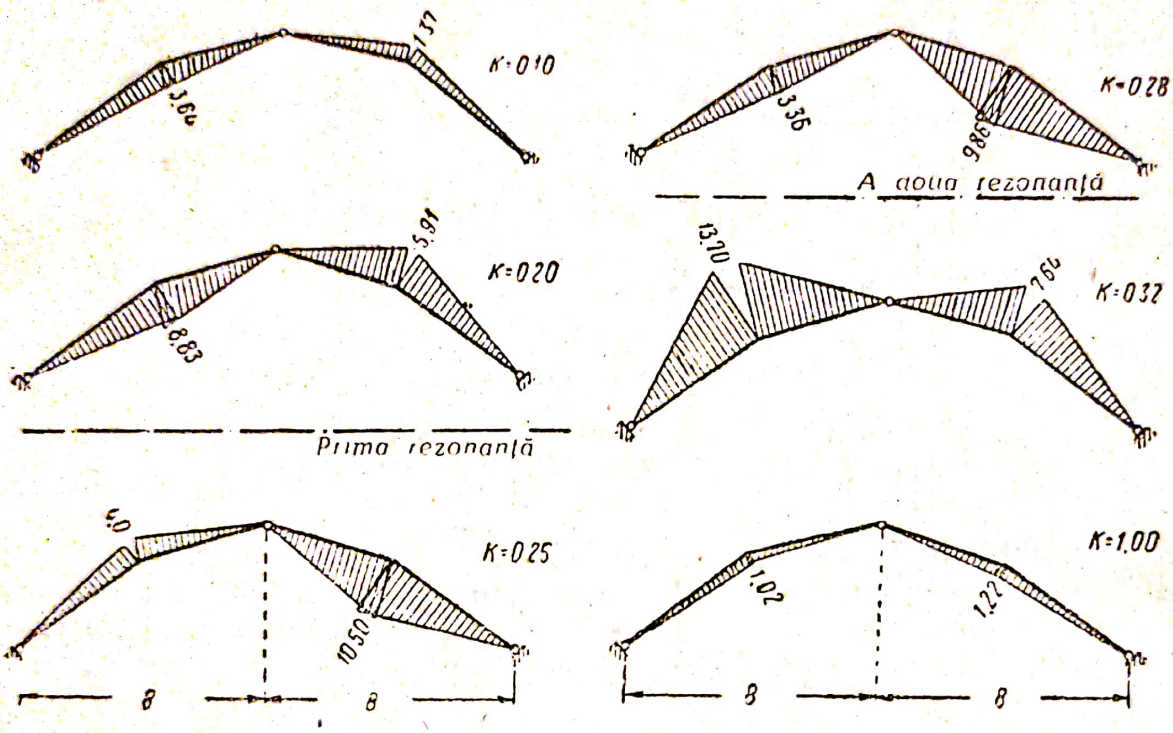


Fig. 89

§ 30. Calculul podurilor în arc la greutatea platelajului

Foarte des, la podurile în arc (în special la cele de beton armat), greutatea platelajului depăşeşte greutatea arcului însuşi. In acest caz nu este posibil ca să nu se ţină seama de această greutate. Calculul la greutatea platelajului modifică schema de calcul dinamic al arcului.

Astfel, de exemplu, pentru podul în arc cu calea sus, înfăţişat în fig. 90 a, schema de calcul este arătată în fig. 90 b. In acest caz sistemul va avea acelaş număr de grade de libertate pe care îl are un arc cu mase concentrate în secţiunile de îmbinare ale stâlpilor cu arcul propriu zis, întrucât deplasările maselor situate pe axa arcului determină şi deplasarea maselor platelajului; de aceea numărul parametrilor necesari pentru determinarea deformaţiei sistemului nu se schimbă.

In acest caz însă, problema se complică oarecum, întrucât deplasarea maselor, care se găsesc la capetele unui şi aceluiaşi stâlp, se va produce în direcţii diferite. Astfel, de exemplu, la montantul AB (fig. 90 b) masa de jos m_4 se va deplasa în direcţia $1—1$, pe când masa de sus m_1 se va deplasa în acelaş timp numai pe ver-

ticală. Masa m_2, așezată la cheia arcului, în afară de deplasări verticale poate avea și deplasări orizontale, în timp ce masa de sus m_1 de deasupra cheii poate să se deplaseze numai pe verticală.

La calculul unor asemenea sisteme, procedeul cel mai indicat este ca să ținem seama separat de influența forței de inerție a fiecărei mase. Cu toate că, în acest caz, numărul ecuațiilor de echilibru sporește, iar o parte din ele vor depinde unele de altele, totuși acest procedeu de calcul va fi cel mai simplu. În cazul când masa arcului însuși nu este mare în raport cu greutatea întregului platelaj, masele arcului m_2, m_3, m_4 (fig. 90) se pot transfera în punctele de aplicație ale maselor concentrate ale platelajului. Această transferare înseamnă în mod practic că componentele orizontale ale forțelor de inerție ale arcului nu se iau în considerare. Eroarea ce rezultă cu o astfel de schemă de calcul va fi cu atât mai mică cu cât arcul este mai pleoștit.

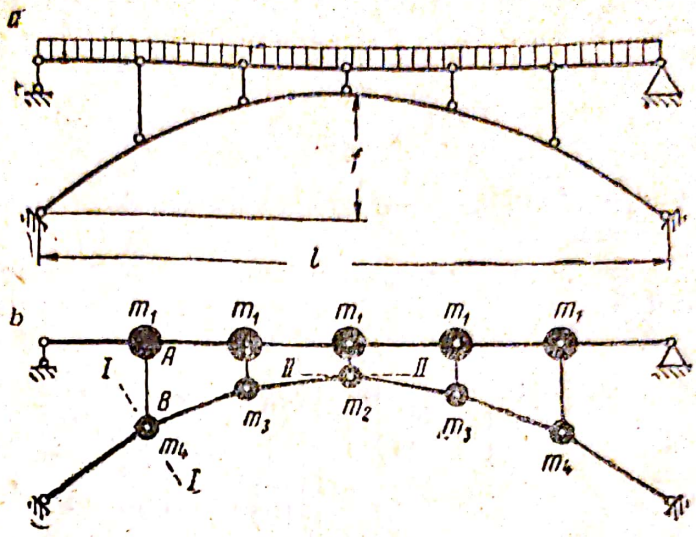
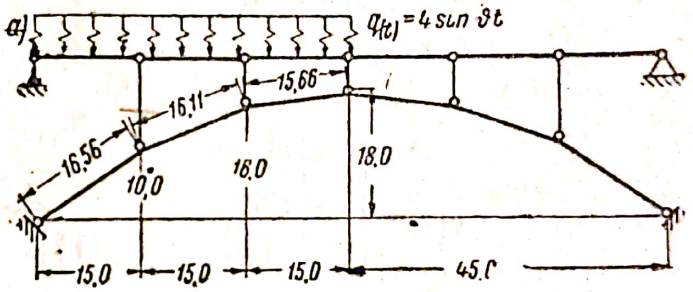


Fig. 90



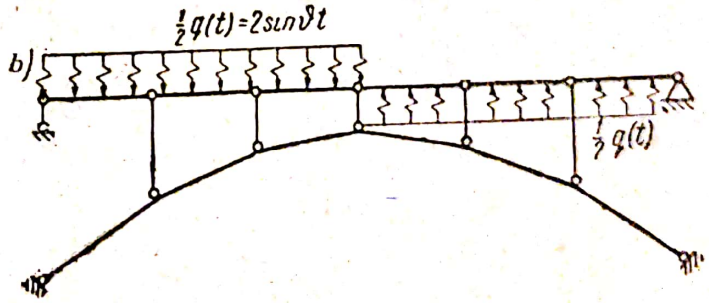


Fig. 91

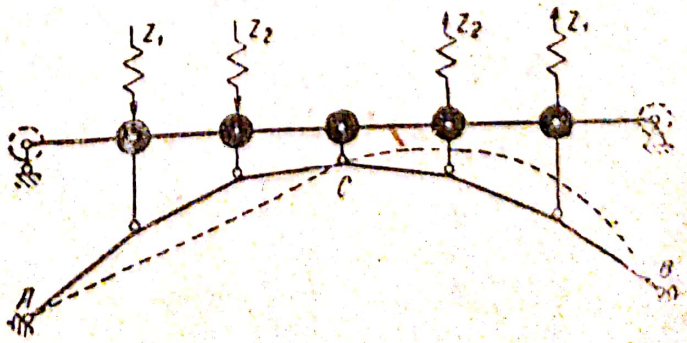


Fig. 92

Să examinăm un exemplu de aplicare a unei astfel de scheme de calcul. In fig. 91 este reprezentat un arc cu două articulaţii având axa după următoarea parabolă de gradul al doilea ;

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x)$$

raportul săgeţii către deschiderea arcului fiind $\frac{f}{l} = \frac{1}{5}$.

Descompunem sarcinile oscilatorii indicate în fig. 91a, în sarcini simetrice şi antisimetrice. Intrucât sarcinile uniform distribuite nu provoacă momente încovoietoare în secţiunile unui arc parabolic[1], pentru determinarea momentelor încovoietoare dinamice trebue să considerăm numai încărcarea antisimetrică, arătată în fig. 91 b şi 92. La forţele de inerţie grupate necunoscute antisimetrice Z_1 şi Z_2 şi la încărcare (fig. 91 be vor corespunde forme antisimetrice da oscilaţii, care sunt indicate cu linii punctate în fig. 92. L) oscilaţii mici se pot neglija deplasările orizontale ale punctului C. Din cauza antisimetriei se poate considera că în punctul C momentul este egal cu zero, deci sistemul poate fi calculat ca un arc static determinat cu trei articulaţii.

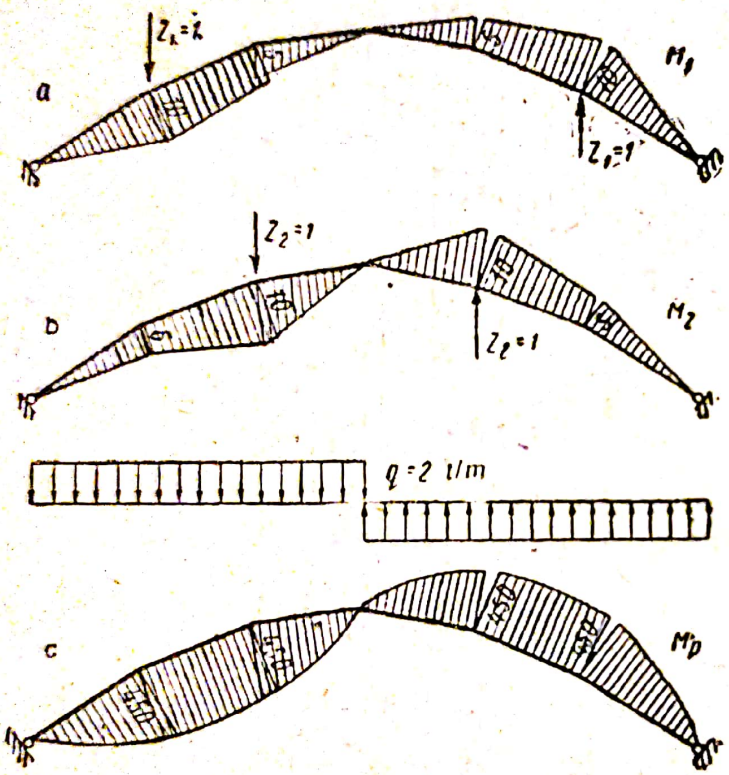


Fig. 93

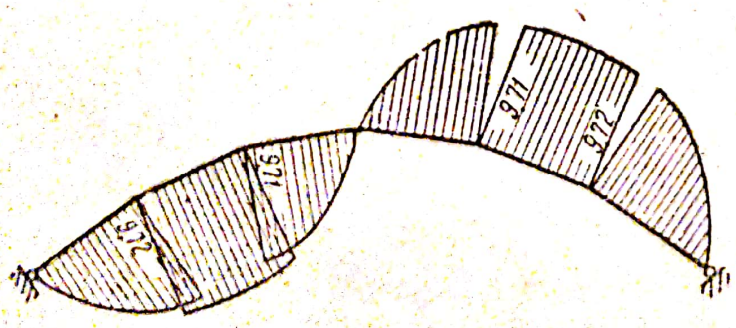


Fig. 94

In fig. 93 sunt reprezentate diagramele momentelor $\overline{M}_1$ şi $\overline{M}_2$ produse de forţele unitare Z_1 şi Z_2, precum şi diagrama momentelor din încărcarea dată.

[1]) Nu se ţine seama de momentele încovoietoare de valoare mică, care sunt produse de compresiunea arcului.

Cu ajutorul acestor diagrame se calculează deplasările:

$$\frac{1}{1\,000} EI\delta_{11} = 3{,}25\,; \qquad \frac{1}{1\,000} EI\delta_{22} = 3{,}20\,;$$

$$\frac{1}{1\,000} EI\delta_{12} = 2{,}82\,;$$

$$\frac{1}{1\,000} EI\Delta_{1p} = 100\,; \qquad \frac{1}{1\,000} EI\Delta_{2p} = 99{,}3$$

Determinăm mai întâi frecvenţa oscilaţiilor proprii antisimetrice. Ecuaţia secular㠹 utilizând notaţia $\lambda = \frac{EI}{m \cdot 1\,000\varphi^2}$ se va scrie astfel:

$$\begin{vmatrix} (1{,}625 - \lambda) & 1{,}41 \\ 1{,}41 & (1{,}6 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Rezolvând această ecuaţie obţinem:

$$\lambda_1 = 3{,}022\,; \qquad \lambda_2 = 0{,}202$$

Prin urmare, frecvenţa oscilaţiilor antisimetrice va fi:

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1\,000\,\lambda_1}} \sqrt{\frac{EI}{m}} = 0{,}0182 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1\,000\,\lambda_2}} \sqrt{\frac{EI}{m}} = 0{,}0704 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Trecem la determinarea forţelor de inerţie Z_1 şi Z_2.

Notând $\vartheta = k \sqrt{\frac{EI}{m}}$, calculăm deplasările principale:

$$EI\,\delta_{11}^{*} = \delta_{11} - \frac{2}{m\vartheta^2} = 3\,250 - \frac{2}{k^2}$$

$$EI\,\delta_{22}^{*} = \delta_{22} - \frac{2}{m\vartheta^2} = 3\,200 - \frac{2}{k^2}$$

Ecuaţiile de condiţie pentru determinarea forţelor de inerţie vor avea următorul aspect:

$$\left(3\,250 - \frac{2}{k^2}\right) Z_1 + 2\,820\, Z_2 + 100\,000 = 0$$

$$2\,820\, Z_1 + \left(3\,200 - \frac{2}{k^2}\right) Z_2 + 99\,300 = 0$$

Admiţând $k = 0{,}015$, vom avea

$$\frac{2}{k^2} = \frac{2}{0{,}000225} = 8\,900$$

Substituind această valoare în ecuaţiile de condiţie de mai sus, obţinem :

$$-5\,650\,Z_1 + 2\,820\,Z_2 + 100\,000 = 0$$
$$2\,820\,Z_1 - 5\,700\,Z_2 + 99\,300 = 0$$

sau

$$-Z_1 + 0{,}50\,Z_2 + 17{,}7 = 0$$
$$Z_1 - 2{,}02\,Z_2 + 35{,}20 = 0$$

Rezolvând aceste ecuaţii obţinem :

$$Z_1 = 34{,}9 \qquad \text{şi} \qquad Z_2 = 34{,}7$$

In fig. 94 este reprezentată diagrama momentelor ale cărei ordonate sunt calculate cu formula (116)

$$M_k = M_{kp} + 34{,}9\,\overline{M}_{k1} + 34{,}7\,\overline{M}_{k2}$$

Comparând această diagramă (fig. 94) cu diagrama (fig. 93 b) a acţiunii statice a încărcării, rezultă că momentele au crescut cu peste 100%.

C — *CALCULUL DINAMIC AL GRINZILOR CU ZĂBRELE*

§ 31. Eforturile în elementele grinzilor cu zăbrele la încărcări oscilatorii

Să examinăm o grindă cu zăbrele cu mase concentrate în nodurile inferioare[1] şi cu încărcare oscilatorie pe talpa inferioară, după cum se arată în fig. 95. Lungimea panoului este 6 m, iar înălţimea — 4 m.

Intrucât grinda şi încărcarea ei sunt simetrice, se vor produce la oscilaţii numai forme simetrice de deplasare ; de aceea în cazul de faţă vor exista numai două forţe de inerţie necunoscute. In fig. 96 sunt înfăţişate schemele grinzilor cu zăbrele cu eforturile respective, provocate de acţiunea forţelor de inerţie $Z_1 = 1$ şi $Z_2 = 1$, precum şi de încărcarea grinzii cu amplitudinile forţelor de inerţie. Forţa unitară Z_2 este formată dintr'un cuplu ; de aceasta trebue să se ţină seama la compunerea ecuaţiilor de condiţie introducând pe lângă necunoscuta Z_2 numai o jumătate a masei.

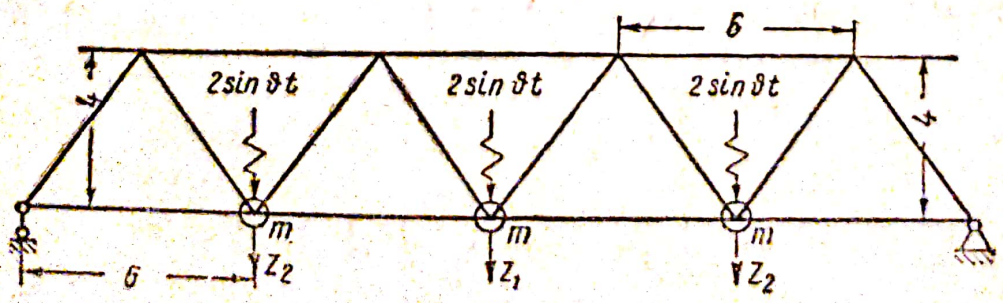


Fig. 95

[1] Posibilitatea reportării masei grinzii cu zăbrele şi a masei platelajului la nodurile uneia din tălpi s'a tratat la § 18.

În tabloul 15 sunt indicate valorile deplasărilor unitare și din încărcare.

Tabloul 15

N-rul elementelor	S	$\overline{N}_1$	$\overline{N}_2$	$\overline{N}_p$	$\overline{N}_1^2 S$	$\overline{N}_2^2 S$	$N_1 N_2 S$	$N_1 N_p\ S$	$\overline{N}_2 N_p\ S$
1—2	6	0,375	0,750	2,250	0,844	3,375	1,688	5,063	10,125
2—3	6	1,125	1,500	5,250	7,594	13,50	10,125	35,439	47,250
6—7	6	—0,750	—1,500	—4,500	3,375	13,50	6,750	20,25	40,50
7—8	3	—1,500	—1,500	6,000	6,750	6,750	6,750	27,00	27,00
1—6	5	—0.625	—1,25	—3,750	1,953	7,813	3,906	11,718	23,438
6—2	5	0,625	1,25	3,750	1,953	7,813	3,906	11,718	23,438
2—7	5	—0,625	0	—1,25	1,953	0	0	3,906	0
7—3	5	0,625	0	1,25	1,953	0	0	3,906	0
				$\Sigma = 26,375$		52,750	33,125	119,00	171,751

Tabloul cuprinde jumătate din toate elementele grinzii cu zăbrele; elementul 7—8 este introdus cu lungimea egală cu $\frac{1}{2}d$; de aceea toate deplasările vor fi egale cu dublul sumelor produselor respective, calculate pentru jumătatea grinzii.

Din datele tabloului 15 găsim:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EF} 2 \cdot 26,375 = \frac{52,75}{EF}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EF} \cdot 2 \cdot 33,125 = \frac{66,25}{EF}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EF} 2 \cdot 52,75 = \frac{105,5}{EF}$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EF} 2 \cdot 119 = \frac{238}{EF}$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EF} 2 \cdot 171,75 = \frac{343,5}{EF}$$

Pentru acest caz, ecuația seculară va avea următoarea formă:

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11} - \lambda) & \frac{1}{2}\delta_{12} \\ \delta_{21} & \left(\frac{1}{2}\delta_{22} - \lambda\right) \end{vmatrix} = 0$$

în care

$$\lambda = \frac{EF}{m\varphi^2}$$

Substituind valorile numerice ale lui δ, obținem următoarea ecuație:

$$\begin{vmatrix} (52.75 - \lambda) & 33{,}12 \\ 66{,}25 & (52{,}75 - \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 105{,}5\,\lambda + 588 = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$\lambda_1 = 99{,}58 \qquad \lambda_2 = 5{,}92$$

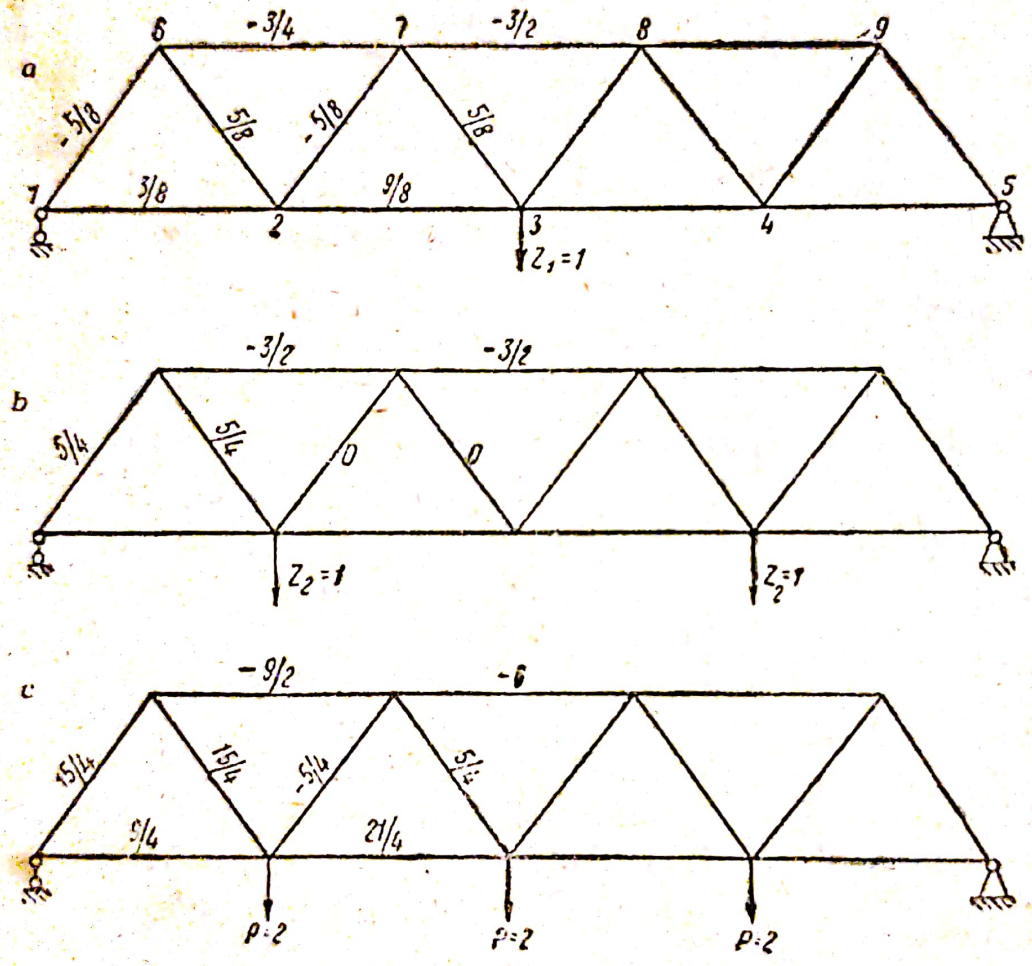


Fig. 96

Utilizând aceste rădăcini găsim:

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\frac{EF}{m}} = 0{,}1002\sqrt{\frac{EF}{m}}$$

$$\varphi_2 = 0{,}4105\sqrt{\frac{EF}{m}}$$

Admitem frecvența oscilațiilor forțate

$$\vartheta = k\sqrt{\frac{EF}{m}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ca și la calculul cadrelor, găsim cu ajutorul formulei (109)

$$\delta_{11}^{*} = \delta_{11} - \frac{1}{m\vartheta^2} = \frac{1}{EF}\left(52{,}75 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$\delta_{22}^{*} = \delta_{22} - \frac{2}{m\vartheta^2} - \frac{1}{EF}\left(105{,}5 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Ecuațiile de condiție, după reducerea cu EF vor avea următorul aspect :

$$\left.\begin{aligned}\left(52{,}75 - \frac{1}{k^2}\right)Z_1 + 66{,}25\,Z_2 + 238 = 0\\ 66{,}25\,Z_1 + \left(105{,}5 - \frac{2}{k^2}\right)Z_2 + 343{,}5 = 0\end{aligned}\right\} \qquad (135)$$

Admițând $k = 0{,}05$, ecuațiile (135) se vor scrie astfel

$$-347{,}25\,Z_1 + 66{,}25\,Z_2 + 238 = 0$$
$$66{,}25\,Z_1 - 694{,}5\,Z_2 + 3435 = 0$$

Rezolvând aceste ecuații, obținem :

$$Z_1 = 0{,}795 \qquad Z_2 = 0{,}571$$

Admițând apoi succesiv $k = 0{,}07$; $0{,}12$; $0{,}37$; $0{,}45$; 1 și ∞ și rezolvând sistemul de ecuații pentru diferitele valori ale lui k, obținem pentru forțele de inerție, o serie de valori care sunt trecute în tabloul 16.

Tabloul 16

$k=$	0,05	0,07	prima rezonanță 0,1002	0,12	0,37	a 2-a rezonanță 0,4105	0,45	1,00	∞
Z_1	0,795	2,290	∞	−8,02	−4,355	∞	−0,003	−1,940	−2,00
Z_2	0,571	1,640	∞	−5,62	−0,601	∞	−3,558	−2,075	−2,00

Folosind ecuația (101), care în cazul de față are forma,

$$N_k = N_{kp} + \overline{N}_{k1}\,Z_1 + \overline{N}_{k2}\,Z_2, \qquad (136)$$

determinăm efortul dinamic maxim în barele grinzii, produse de forțele oscilatorii de inerție.

Valorile eforturilor dinamice determinate în barele grinzii sunt trecute în tabloul 17.

Tabloul 17

No. barel	Eforturile dinamice pentru diferite valori a lui k								
	$k=0$	$k=0{,}05$	$k=0{,}07$	$k=0{,}1002$	$k=0{,}12$	$k=0{,}37$	$k=0{,}4105$	$k=0{,}45$	$k=1{,}00$
1—2	2,25	2,976	4,339	1-a rezonanță	−4,972	0,167	2-a rezonanță	−0,441	−0,034
2—3	5,25	7,001	10,287	idem	−12,200	−0,551	idem	−0,133	−0,046
6—7	−4,50	−5,953	−8,678	„	9,945	−0,334	„	0,882	0,067
7—8	−6,00	−8,049	−11,896	„	14,460	1,431	„	−0,616	0,022
1—6	−3,75	−4,961	−7,231	„	8,287	−0,278	„	0,732	0.055
6—2	3,75	4,961	7,231	„	−8,287	0,278	„	−0,732	−0,055
2—7	−1,25	−1,747	−2,681	„	3,762	1,471	„	−1,248	−0,038
7—3	1,25	+1,747	2,681	„	−3,762	−1,471	„	1,248	0,038

Scanned with OKEN Scanner

În coloana a doua a tabloului sunt indicate valorile eforturilor din amplitudinile forțelor oscilatorii N_p, adică pentru $\vartheta = 0$.

Din tabloul 17 rezultă că eforturile dinamice sunt mai mari decât cele statice maxime. Pentru $k = 0{,}12$, frecvența forțelor oscilatorii depășește prima frecvență proprie; astfel se explică schimbarea semnului efortului la toate barele la care corespunde lipsa de coincidență a fazei oscilațiilor forțate cu faza sarcinilor oscilatorii.

In fig. 97 sunt reprezentate diagramele construite după datele tabloului 17, ale forțelor normale pentru diferite valori ale lui k. Din aceste diagrame se vede modul cum variază valorile forțelor normale în raport cu frecvența oscilațiilor forțate.

Pentru ca să urmărim caracterul variației eforturilor dinamice, este recomandabil ca sistemul de ecuații (135) să fie rezolvat în forma lui generală. In acest mod, obținem:

$$Z_1 = \frac{476\,k^2 - 2\,352\,k^4}{2 - 211\,k^2 + 1\,176\,k^4}$$

$$Z_2 = \frac{343{,}5\,k^2 - 2\,352\,k^4}{2 - 211\,k^2 + 1\,176\,k^4}$$

Cu aceste valori ale lui Z determinăm efortul N_1, folosind în acest scop formula (136) și substituind în ea valorile lui N_p și $\overline{N_i}$ din tabloul 15; obținem după simplificare:

$$\begin{aligned} N_{12} &= \alpha\,(4{,}5 - 38{,}625\,k^2); & N_{78} &= -\alpha\,(12 - 36{,}75\,k^2) \\ N_{23} &= \alpha\,(10{,}5 - 57\,k^2); & N_{62} &= \alpha\,(7{,}5 - 64{,}375\,k^2) \\ N_{67} &= \alpha\,(9 - 77{,}25\,k^2); & N_{27} &= -\alpha\,(2{,}5 + 33{,}75\,k^2) \end{aligned} \qquad (137)$$

In aceste expresii:

$$\alpha = \frac{1}{2 - 211\,k^2 + 1176\,k^4}$$

Cu ajutorul formulei (137) sunt construite curbele de variație ale eforturilor, reprezentate în diagramele din fig. 98 și 99.

O particularitate caracteristică este creșterea rapidă a tuturor eforturilor în apropiere de rezonanță. O altă particularitate este faptul că la variația frecvenței forțelor oscilatorii în limitele dintre prima și a doua rezonanță, efortul din talpa inferioară în primul panou schimbă semnul, pe când în panoul al doilea (elementul 2—3) efortul rămâne cu același semn. O situație analoagă se prezintă și la talpa superioară și la diagonalele 6—2 și 2—7.

Mult mai demonstrativă este însă valoarea coeficientului dinamic, care se determină prin raportul:

$$1 + \mu = \frac{N_{din}}{N_{st}} \qquad (138)$$

In tabloul 18 figurează valorile coeficienților dinamici pentru grinda cu zăbrele considerată (fig. 95), calculate după formula (138) substituind în formulă eforturile dinamice N din tabloul 17 pentru diferite valori ale lui k și eforturile statice N_p din tabloul 15.

Scanned with OKEN Scanner

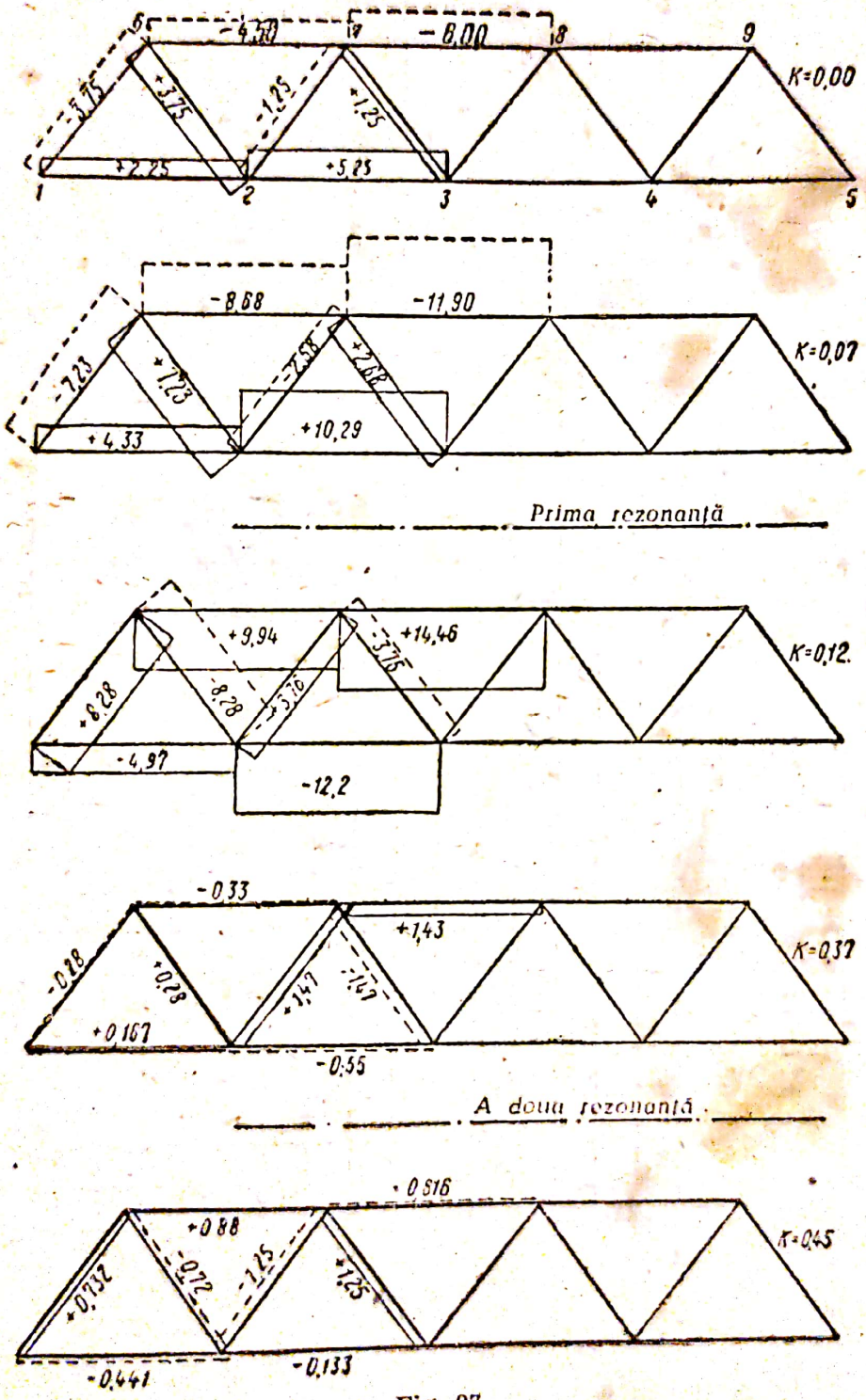


Fig. 97

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul 18

Coeficientul dinamic $(1 + \mu)$

Nr. elementului	$k=0$	$k=0,05$	$k=0,07$	$k=0,12$	$k=0,25$	$k=0,37$	$k=0,45$	$k=1$
1—2	1	1,32	1,93	—2,21	—0,14	0,075	—0,20	—0,015
2—3	1	1,34	1,96	—2,32	—0,20	0,105	—0,025	—0,009
6—7	1	1,32	1,93	—2,21	—0,14	0,073	—0,20	—0,015
7—8	1	1,34	1,98	—2,41	—0,24	—0,24	0,10	—0,004
1—6	1	1,32	1 93	—2,21	—0,14	0,075	—0,195	—0,015
6—2	1	1,32	1,93	—2,21	—0,14	0,075	—0,195	—0,015
2—7	1	1,40	2,14	—3,00	—0,55	—1,18	1,00	0,030
7—8	1	1,40	2,14	—3,00	—0,55	—1,18	1,00	0,030

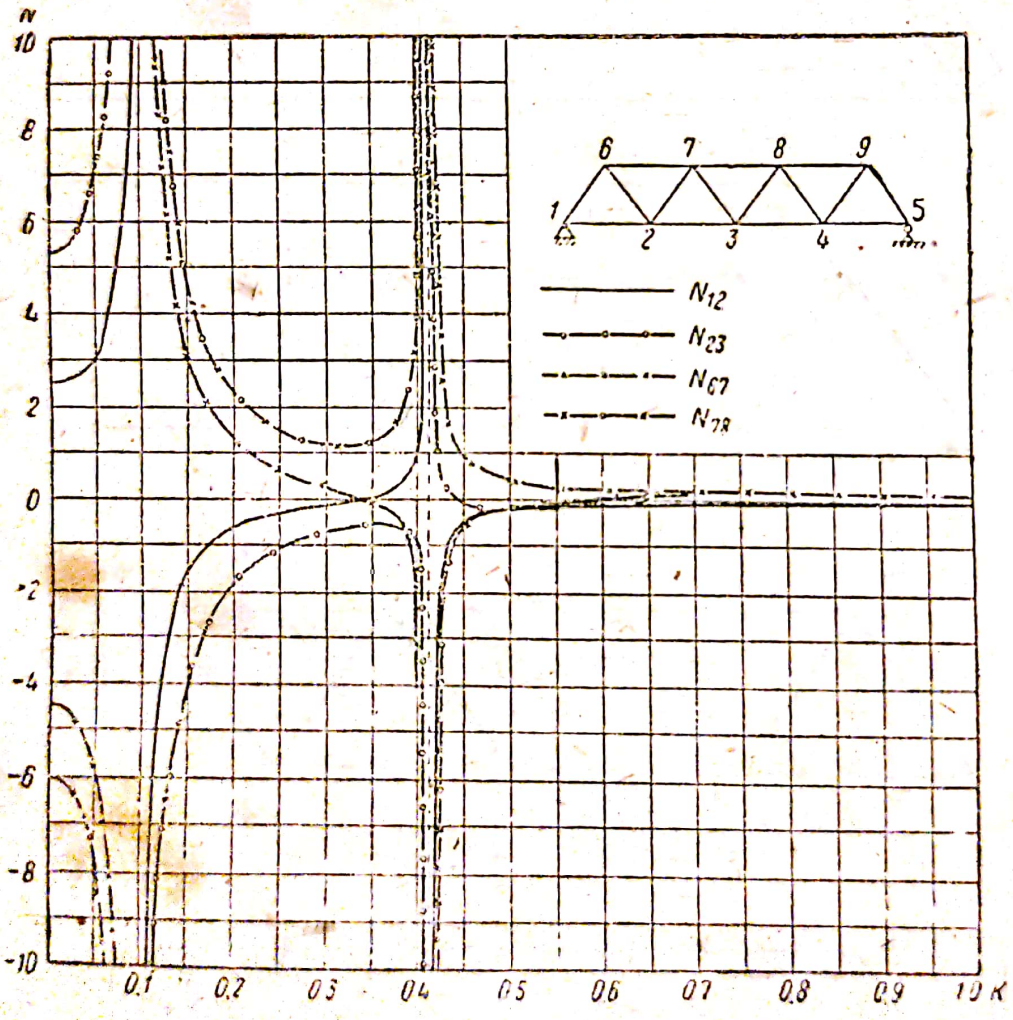


Fig. 98.

Utilizând datele din tablou s'a construit diagrama din fig. 100, reprezentând variaţia coeficienţilor dinamici în funcţie de variaţia frecvenţei (a coeficientului k). Este interesant să observăm că, coeficienţii dinamici pentru barele 1—2; 6—7; 1—6 şi 6—2 sunt identici

Scanned with OKEN Scanner

și sunt prin urmare reprezentați prin aceeași curbă. Aceasta se explică prin faptul că eforturile se găsesc într'o relație de reciprocitate care poate fi stabilită prin secționarea nodului inferior *No. 1* și a nodului superior *No. 6*. Eforturile dinamice în diagonalele 2—7 și 7—3 au de

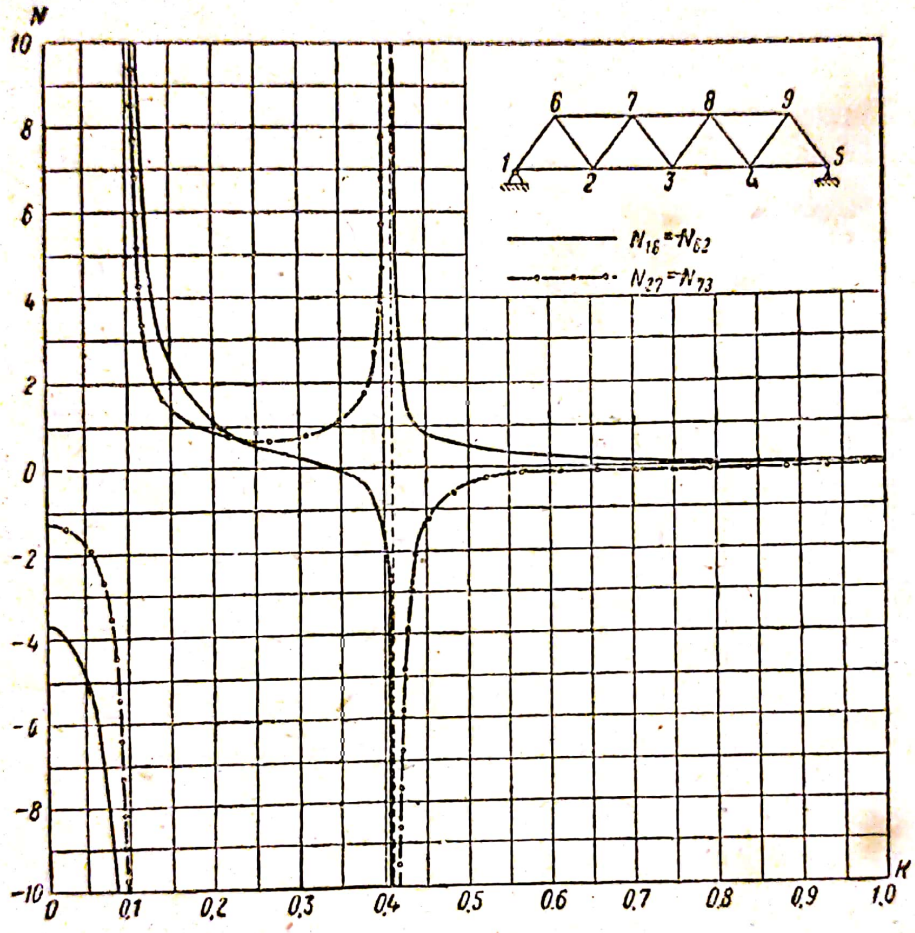


Fig. 99

asemenea aceeași lege de variație a coeficientului dinamic, ceea ce este explicabil, întrucât prin secționarea nodului *No. 7* se formează o legătură $N_{27} = -N_{73}$. Pentru scopurile practice o importanță foarte mare o au primele porțiuni ale diagramei până la prima rezonanță. Restul porțiunilor au mai mult un interes teoretic decât practic.

Exemplul 17. *Să se determine variația eforturilor dinamice în grinda cu zăbrele înfățișată în fig. 101.*

Lungimea panoului este 6 m, iar înălțimea grinzii — 4 m.

Această grindă cu zăbrele are cinci grade de libertate. Din cauza simetriei încărcării, numărul necunoscutelor este egal cu trei. In fig. 102 sunt arătate solicitările unitare și cele de încărcare. Valorile eforturilor din barele pentru fiecare solicitare sunt indicate în figură lângă bara din jumătatea din stânga a grinzii.

Deplasările datorite solicitărilor unitare ale forțelor de inerție, calculate prin metodele obișnuite, au următoarele valori :

$$EF\delta_{11} = \sum \overline{N}_1^2 S = 147\,0; \qquad EF\delta_{12} = EF\delta_{21} = \sum \overline{N}_1 \overline{N}_2 S = 240$$

$$EF\delta_{22} = \sum \overline{N}_2^2 S = 427{,}9; \qquad EI\,\delta_{13} = EF\delta_{31} = \sum \overline{N}_1 \overline{N}_3 S = 134$$

$$EF\delta_{33} = \sum \overline{N}_3^2 S = 159{,}0; \qquad EF\delta_{23} = EF\delta_{32} = \sum \overline{N}_2 \overline{N}_3 S = 241.$$

Ecuația seculară pentru determinarea frecvențelor oscilațiilor proprii corespunzătoare formei simetrice de oscilații, poate fi scrisă sub următoarea formă :

$$\begin{vmatrix} (2\delta_{11} - \lambda) & \delta_{12} & \delta_{13} \\ 2\delta_{21} & (\delta_{22} - \lambda) & \delta_{23} \\ 2\delta_{31} & \delta_{32} & (\delta_{33} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

în care

$$\lambda = \frac{2EF}{m\varphi^2}$$

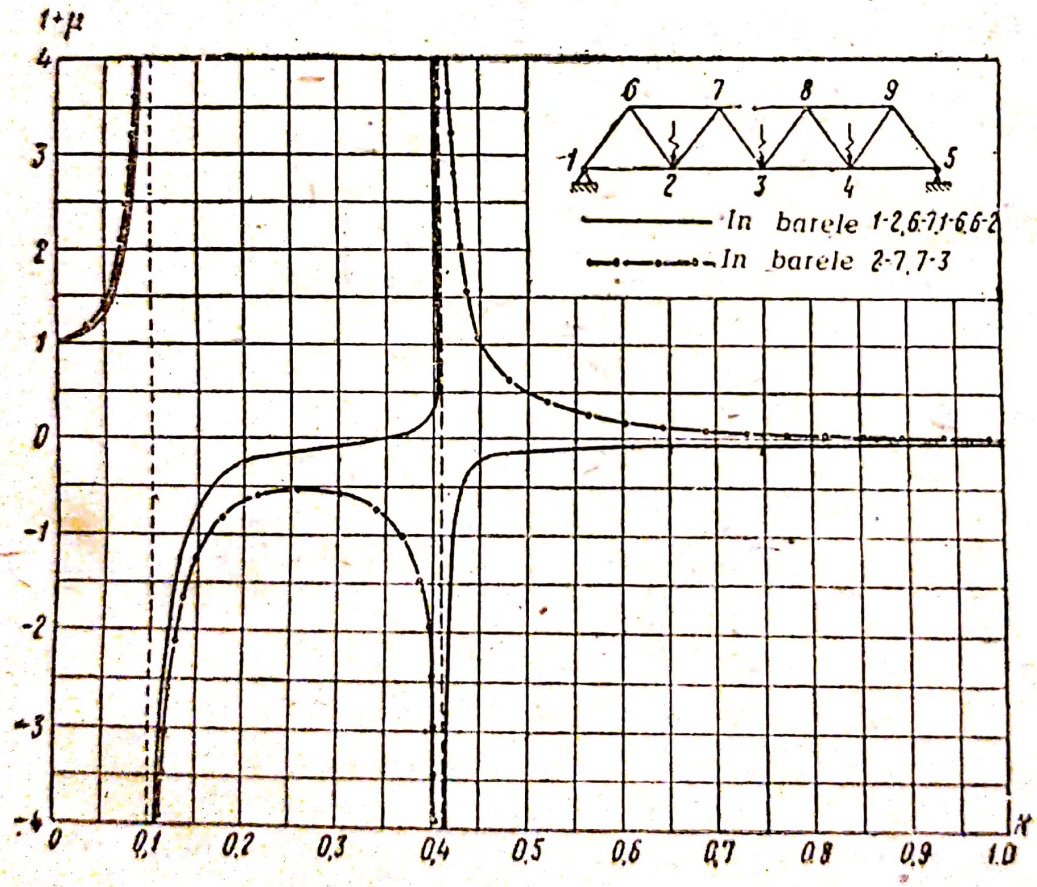


Fig. 100

Substituind în această ecuație valorile deplasărilor δ determinate mai sus și rezolvând determinantul, obținem

$$\begin{vmatrix} (294 - \lambda) & 240 & 134 \\ 480 & (427 - \lambda) & 241 \\ 268 & 241 & (159 - \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^3 - 880\lambda^2 + 30\,984\lambda - 235\,744 = 0.$$

Rezolvarea acestei ecuații ne dă trei rădăcini :

$$\lambda_1 = 843{,}6; \qquad \lambda_2 = 25{,}41 \qquad \lambda_3 = 10{,}99$$

Scanned with OKEN Scanner

la care corespund următoarele valori ale frecvenței :

$$\varphi_1 = 0{,}0437 \sqrt{\frac{EF}{m}} \qquad \varphi_2 = 0{,}2806 \sqrt{\frac{EF}{m}}$$

$$\varphi_3 = 0{,}4266 \sqrt{\frac{EF}{m}}$$

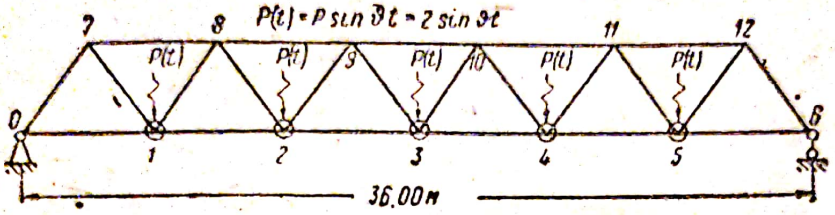


Fig. 101

Determinăm apoi deplasările provocate de încărcare :

$$EF\,\Delta_{1p} = \sum \bar{N}_1 N_p S = 1\,042$$

$$EF\,\Delta_{2p} = \sum \bar{N}_2 N_p S = 1\,816$$

$$EF\,\Delta_{3p} = \sum \bar{N}_3 N_p S = 1\,068$$

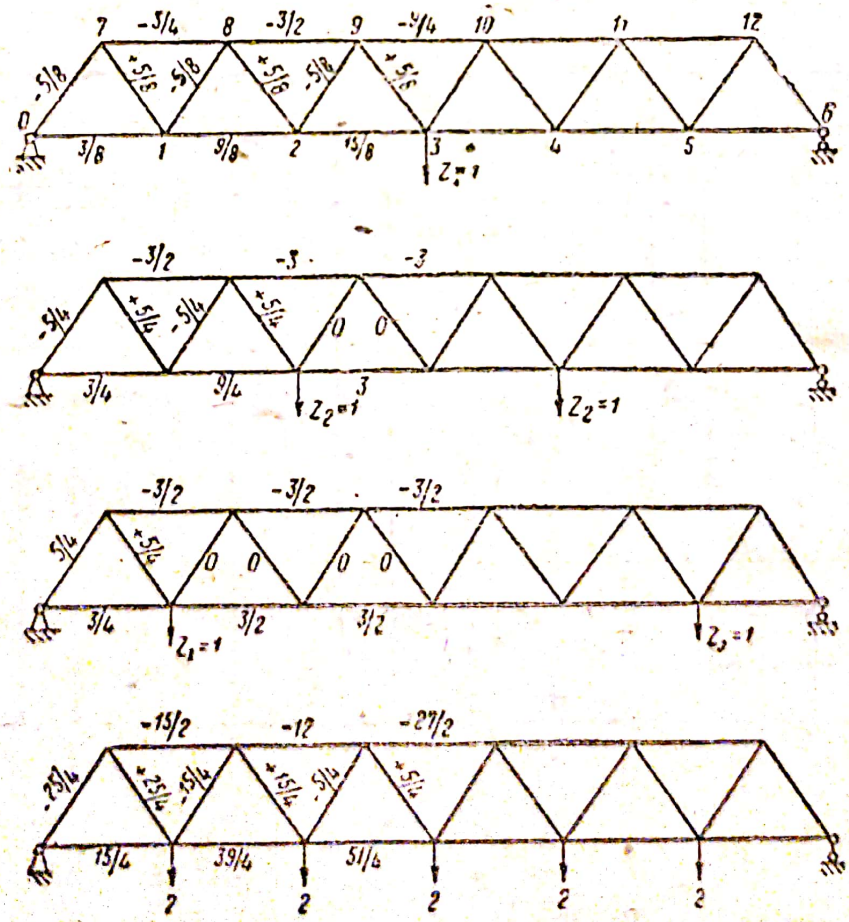


Fig. 102

Ca și mai înainte admitem că

$$\vartheta = k\sqrt{\frac{EF}{m}}$$

Atunci ecuațiile de condiție se vor scrie astfel:

$$\left(147 - \frac{1}{k^2}\right) Z_1 + 240\, Z_2 + 134\, Z_3 + 1042 = 0$$

$$240\, Z_1 + \left(427 - \frac{2}{k^2}\right) Z_2 + 241\, Z_3 + 1\,816 = 0$$

$$134\, Z_1 + 241\, Z_2 + \left(159 - \frac{2}{k^2}\right) Z_3 + 1\,068 = 0$$

Fără a mai arăta aci rezolvarea acestor ecuații pentru diferite valori ale lui k, ne vom limita la indicarea rezultatelor definitive [1]).

Rezolvând aceste ecuații cu ajutorul determinanților sub forma generală și stabilind coeficienții dinamici

$$1 + \mu = \frac{N_{din}}{N_{st}}$$

obținem:

— pentru barele $0-1$, $0-7$ și $7-8$

$$1 + \mu_{01} = \beta\,(1 - 47{,}4\,k^2 + 252{,}2\,k^4)$$

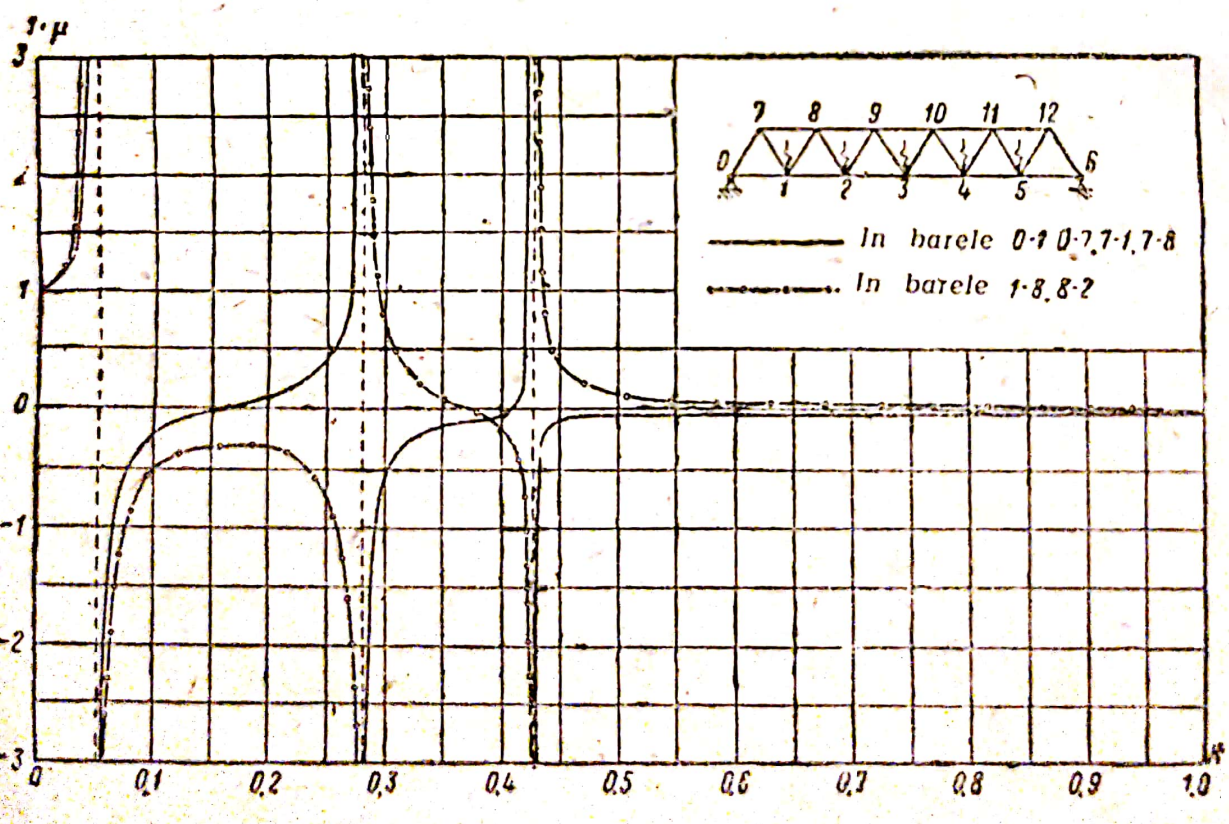


Fig. 103

[1]) Rezultatele sunt extrase din teza de doctorat a aspirantului MIIT V. I. Sablin — 1948.

Scanned with OKEN Scanner

— pentru barele *1—8* și *8—2*

$$1 + \mu_{18} = \beta (1 + 36{,}3\, k^2 - 317{,}3\, k^4)$$

— pentru diagonalele *2—9* și *9—3*

$$1 + \mu_{29} = \beta (1 + 81\, k^2 - 169\, k^4)$$

— pentru bara tălpii superioare *9—10*

$$1 + \mu_{9-10} = \beta (1 - 52\, k^2 + 15\, k^4)$$

— pentru bara tălpii superioare *8—9*

$$1 + \mu_{89} = \beta (1 - 16\, k^2 + 38\, k^4)$$

— pentru barele tălpii inferioare *1—2* respectiv, *2—3*

$$1 + \mu_{12} = \beta (1 - 28{,}1\, k^2 + 120{,}8\, k^4)$$

$$1 + \mu_{23} = \beta (1 - 10{,}3\, k^2 + 25{,}4\, k^4)$$

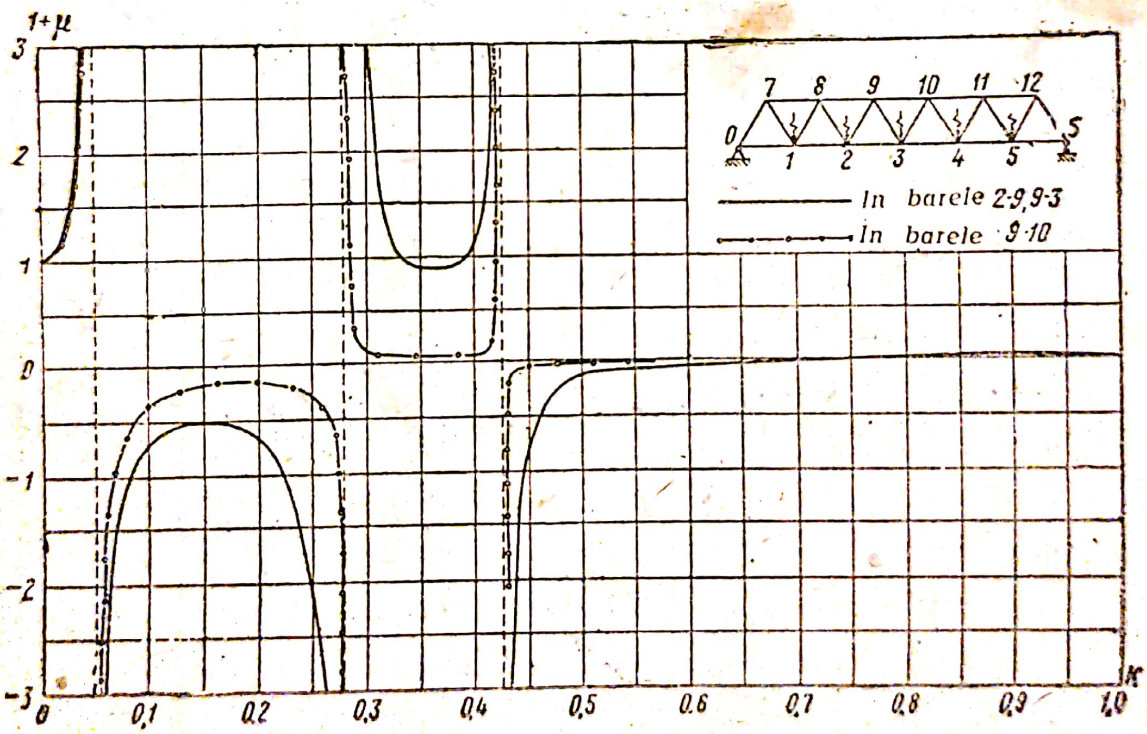


Fig. 104

In toate expresiile de mai sus

$$\beta = 1 - 440\, k^2 + 7\,746\, k^4 - 29\,468\, k^6$$

Fig. 103 și 104 reprezintă diagramele variației coeficientului dinamic.

ANEXA

Tabloul 1

VALORILE FUNCȚIILOR :

$$\alpha(\nu)=\frac{3}{\nu}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\operatorname{tg}\nu}\right);\qquad \beta(\nu)=\frac{6}{\nu}\left(\frac{1}{\sin\nu}-\frac{1}{\nu}\right)\qquad \theta_1(\nu)=\frac{3}{\nu^2}\left(\frac{\operatorname{tg}\nu}{\nu}-1\right)$$

$$\theta_2(\nu)=\frac{3}{\nu^2}\left(1+\nu\operatorname{tg}\nu-\frac{2}{\cos\nu}+\frac{\operatorname{tg}\nu}{\nu}\right);\qquad \theta_3(\nu)=\frac{6}{\nu^2}\left(\frac{1}{\cos\nu}-\frac{\operatorname{tg}\nu}{\nu}\right)$$

ν	$\alpha(\nu)$	$\beta(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$	$\operatorname{tg}\nu$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,00000
0,20	1,0027	1,0042	1,0163	1,0065	1,0178	0,20271
0,40	1,0107	1,0188	1,0683	1,0252	1,0768	0,42279
0,60	1,0249	1,0437	1,1686	1,0622	1,1901	0,68414
0,80	1,0455	1,0800	1,3456	1,1256	1,3900	1,02964
1,00	1,0737	1,1304	1,6722	1,2395	1,7605	1,55741
1,10	1,0912	1,1617	1,9491	1,3344	2,0750	1,96476
1,20	1,1114	1,1979	2,3822	1,4806	2,5677	2,57215
1,30	1,1345	1,2396	3,1435	1,7342	3,4347	3,60210
1,40	1,1610	1,2878	4,8082	2,2832	5,3332	5,79789
1,50	1,1915	1,3534	11,2013	4,3740	12,6292	14,10142
$\pi/2$	1,2159	1,3880	∞	∞	∞	∞
1,60	1,2266	1,4078	—26,2445	—7,8214	—30,1204	—34,23254
1,70	1,2673	1,4830	—5,7378	—1,1299	—6,7141	—7,69660
1,80	1,3147	1,5710	—3,1308	—0,8271	—3,7410	—4,28626
1,90	1,3704	1,6750	—2,1133	+0,0701	—2,5805	—2,92710
2,00	1,4365	1,7993	—1,5694	0,2575	—1,9658	—2,18504
2,02	1,4512	1,8270	—1,4903	0,2858	—1,8762	
2,04	1,4664	1,8558	—1,4179	0,3115	—1,7044	
2,06	1,4822	1,8858	—1,3516	0,3355	—1,7196	
2,08	1,4987	1,9168	—1,2905	0,3579	—1,6506	
2,10	1,5158	1,9494	—1,2342	0,3788	—1,5872	—1,70985
2,12	1,5336	1,9831	—1,1820	0,3983	—1,5286	
2,14	1,5521	2,0184	—1,1335	0,4166	—1,4741	
2,16	1,5713	2,0552	—1,0884	0,4339	—1,4235	
2,18	1,5914	2,0935	—1,0464	0,4503	—1,3764	
2,20	1,6124	2 1336	—1,0069	0,4659	—1,3323	—1,37382

Scanned with OKEN Scanner

urmare

ν	$\alpha(\nu)$	$\beta(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$	$\lg \nu$
2,22	1,6343	2,1754	—0,9700	0,4807	—1,2911	
2,24	1,6572	2,2194	—0,9354	0,4948	—1,2527	
2,26	1,6812	2,2654	—0,9028	0,5083	—1,2165	
2,28	1,7062	2,3135	—0,8721	0,5212	—1,1824	
2,30	1,7325	2,3641	—0,8431	0,5336	—1,1504	—1,11921
2,32	1,7601	2,4171	—0,8157	0,5456	—1,1202	
2,34	1,7891	2,4731	—0,7897	0,5572	—1,0917	
2,36	1,8195	2,5320	—0,7651	0,5684	—1,0649	
2,38	1,8516	2,5939	—0,7418	0,5792	—1,0394	
2,40	1,8854	2,6596	—0,7196	0,5897	—1,0151	—0,91601
2,42	1,9212	2,7287	—0,6985	0,5999	—0,9921	
2,44	1,9589	2,8021	—0,6784	0,6098	—0,9703	
2,46	1,9989	2,8798	—0,6592	0,6195	—0,9497	
2,48	2,0413	2,9624	—0,6409	0,6291	—0,9301	
2,50	2,0864	3.0502	—0,6234	0,6385	—0,9114	—0,74702
2,52	2,1343	3,1438	—0,6067	0,6477	—0,8936	
2,54	2,1855	3,2437	—0,5907	0,6566	—0,8767	
2,56	2,2402	3,3508	—0,5753	0,6654	—0,8606	
2,58	2,2988	3,4657	—0,5606	0,6742	—0,8451	
2,60	2,3618	3,5890	—0,5465	0,6828	—0,8304	—0,60160
2,62	2,4295	3,7220	—0,5329	0,6913	—0,8164	
2,64	2,5027	3,8659	—0,5199	0,6997	—0,8030	
2,66	2,5819	4,0218	—0,5073	0,7081	—0,7902	
2,68	2,6680	4,1914	—0,4952	0,7164	—0,7780	
2,70	2,7619	4,3766	—0,4836	0,7246	—0,7663	—0,47273
2,72	2,8646	4,5795	—0,4723	0,7328	—0,7551	
2,74	2,9778	4,8029	—0,4615	0,7410	—0,7444	
2,76	3,1027	5,0499	—0,4511	0,7491	—0,7342	
2,78	3,2414	5,3245	—0,4410	0,7573	—0,7244	
2,80	3,3963	5,6315	—0,4313	0,7654	—0,7151	—0,35553
2,82	3,5704	5,9770	—0,4218	0,7736	—0,7062	
2,84	3,7676	6,3685	—0,4127	0,7817	—0,6976	
2,86	3,9928	6,8160	—0,4039	0,7898	—0,6894	
2,88	4,2525	7,3322	—0,3953	0,7980	—0,6816	
2,90	4,5550	7,9343	—0,3870	0,8063	—0,6742	—0,24611
2,92	4,9121	8,6455	—0,3790	0,8146	—0,6670	
2,94	5,3401	9,4982	—0,3712	0,8229	—0,6603	
2,96	5,8622	10,5383	—0,3636	0,8313	—0,6538	
2,98	6,5134	11,8386	—0,3563	0,8398	—0,6476	
3,00	7,3486	13,5057	—0,3492	0,8483	—0,6417	—0,14255
3,02	8,4583	15,7219	—0,3422	0,8569	—0,6361	
3,04	10,0049	18,8116	—0,3355	0,8657	—0,6308	
3,06	12,3096	23,4176	—0,3289	0,8746	—0,6258	
3,08	16,1105	31,0160	—0,3227	0,8835	—0,6210	
3,10	23,5659	45,9234	—0,3165	0,8926	—0,6165	—0,04162

Scanned with OKEN Scanner

urmare

ν	$\alpha(\nu)$	$\beta(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$	tg ν
3,12	44,8321	88,4522	—0,3103	0,9018	—0,6122	
3,14	600,1900	1199,1629	—0,3044	0,9111	—0,6082	
π	∞	∞	—0,3040	0,9119	—0,6079	0
3,16	—51,2692	—103,7576	—0,2987	0,9206	—0,6045	
3,18	—24,2541	—49,7313	—0,2931	0,9303	—0,6009	
3,20	—15,7398	—32,7063	—0,2876	0,9401	—0,5976	+0,05847
3,22	—11,5688	—24,3683	—0,2823	0,9501	—0,5946	
3,24	—9,0929	—19,4202	—0,2771	0,9602	—0,5917	
3,26	—7,4532	—16,1447	—0,2720	0,9705	—0,5891	
3,28	—6,2872	—17,8166	—0,2670	0,9811	—0,5868	
3,30	—5,4154	—12,0770	—0,2621	0,9920	—0,5846	0,15975
3,32	—4,7371	—10,7282	—0,2574	1,0031	—0,5826	
3,34	—4,1964	—9,6516	—0,2527	1,0143	—0,5809	
3,36	—3,7552	—8,7726	—0,2482	1,0258	—0,5795	
3,38	—3,3887	—8,0419	—0,2437	1,0377	—0,5783	
3,40	—3,0787	—7,4248	—0,2394	1,0499	—0,5772	0,26442
3,42	—2,8129	—6,8968	—0,2351	1,0623	—0,5764	
3,44	—2,5820	—6,4396	—0,2308	1,0750	—0,5758	
3,46	—2,3798	—6,0405	—0,2267	1,0880	—0,5755	
3,48	—2,2017	—5,6888	—0,2227	1,1014	—0,5753	
3,50	—2,0433	—5,3769	—0,2187	1,1152	—0,5751	0,37470
3,52	—1,9015	—5,0081	—0,2148	1,1294	—0,5757	
3,54	—1,7737	—4,8477	—0,2109	1,1440	—0,5764	
3,56	—1,6581	—4,6215	—0,2071	1,1591	—0,5773	
3,58	—1,5530	—4,4160	—0,2034	1,1747	—0,5783	
3,60	—1,4572	—4,2292	—0,1997	1,1907	—0,5797	0,49347
3,62	—1,3693	—4,0581	—0,1961	1,2073	—0,5814	
3,64	—1,2882	—3,9011	—0,1926	1,2244	—0,5833	
3,66	—1,2132	—3,7563	—0,1891	1,2421	—0,5855	
3,68	—1,1435	—3,6227	—0,1856	1,2605	—0,5880	
3,70	—1,0787	—3,4990	—0,1821	1,2795	—0,5908	0,62473
3,72	—1,0184	—3,3839	—0,1787	1,2992	—0,5939	
3,74	—0,9620	—3,2768	—0,1753	1,3197	—0,5974	
3,76	—0,9092	—3,1769	—0,1720	1,3409	—0,6012	
3,78	—0,8595	—3,0835	—0,1687	1,3630	—0,6053	
3,80	—0,8128	—2,9961	—0,1654	1,3861	—0,6099	0,77356
3,82	—0,7687	—2,9140	—0,1622	1,4101	—0,6149	
3,84	—0,7271	—2,8369	—0,1590	1,4351	—0,6203	
3,86	—0,6876	—2,7643	—0,1557	1,4613	—0,6261	
3,88	—0,6502	—2,6959	—0,1525	1,4887	—0,6324	
3,90	—0,6147	—2,6314	—0,1493	1,5174	—0,6392	0,94742
3,92	—0,5809	—2,5703	—0,1461	1,5474	—0,6466	
3,94	—0,5486	—2,5126	—0,1429	1,5789	—0,6545	
3,96	—0,5178	—2,4580	—0,1397	1,6121	—0,6631	
3,98	—0,4884	—2,4062	—0,1365	1,6470	—0,6723	
4,00	—0,4603	—2,3570	—0,1332	1,6838	—0,6823	1,15782

Scanned with OKEN Scanner

urmare

ν	$\alpha(\nu)$	$\beta(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$	tg ν
4,02	—0,4333	—2,3103	—0,1300	1,7227	—0,6930	
4,04	—0,4074	—2,2660	—0,1267	1,7639	—0,7045	
4,06	—0,3825	—2,2237	—0,1233	1,8075	—0,7169	
4,08	—0,3586	—2,1836	—0,1199	1,8538	—0,7304	
4,10	—0,3355	—2,1454	—0,1165	1,9030	—0,7449	1,42353
4,12	—0,3133	—2,1089	—0,1130	1,9555	—0,7606	
4,14	—0,2919	—2,0741	—0,1094	2,0115	—0,7775	
4,16	—0,2712	—2,0410	—0,1057	2,0716	—0,7960	
4,18	—0,2511	—2,0094	—0,1020	2,1362	—0,8160	
4,20	—0,2317	—1,9792	—0,0981	2,2057	—0,8378	1,77778
4,22	—0,2129	—1,9504	—0,0940	2,2808	—0,8615	
4,24	—0,1947	—1,9229	—0,0899	2,3619	—0,8875	
4,26	—0,1769	—1,8966	—0,0855	2,4505	—0,9161	
4,28	—0,1597	—1,8715	—0,0809	2,5471	—0,9475	
4,30	—0,1430	—1,8475	—0,0760	2,6529	—0,9821	2,28585
4,32	—0,1267	—1,8246	—0,0708	2,7694	—1,0206	
4,34	—0,1107	—1,8028	—0,0653	2,8983	—1,0634	
4,36	—0,0952	—1,7819	—0,0594	3,0417	—1,1114	
4,38	—0,0799	—1,7619	—0,0529	3,2026	—1,1653	
4,40	—0,0652	—1,7429	—0,0459	3,3836	—1,2265	3,09632
4,42	—0,0508	—1,7247	—0,0381	3,5893	—1,2963	
4,44	—0,0366	—1,7074	—0,0295	3,8251	—1,3767	
4,46	—0,0227	—1,6909	—0,0197	4,0982	—1,4701	
4,48	—0,0090	—1,6752	—0,0085	4,4179	—1,5800	
4,50	+0,0044	—1,6603	+0,0045	4,7980	—1,7110	4,63733
4,52	0,0176	—1,6461	0,0199	5,2568	—1,8695	
4,54	0,0305	—1,6326	0,0386	5,8218	—2,0652	
4,56	0,0432	—1,6198	0,0617	6,5351	—2,3129	
4,58	0,0558	—1,6076	0,0915	7,4633	—2,6359	
4,60	0,0682	—1,5962	0,1314	8,7218	—3,0745	8,86018
4,62	0,0804	—1,5854	0,1878	10,5224	—3,7036	
4,64	0,0925	—1,5752	0,2748	13,3219	—4,6812	
4,66	0,1044	—1,5656	0,4272	18,2566	—6,4065	
4,68	0,1162	—1,5567	0,7664	29,2848	—10,2671	
4,70	0,1279	—1,5483	2,1964	75,9101	—26,5889	80,71280
$3/2\pi$	0,1351	—1,5434	∞	∞	∞	
4,72	0,1395	—1,5405	—3,8833	—122,3641	+42,8875	
4,74	0,1510	—1,5333	—1,1534	—33,4764	11,7120	
4,76	0,1624	—1,5267	—0,7162	—19,2440	6,7321	
4,78	0,1738	—1,5207	—0,5370	—13,4298	4,6983	
4,80	0,1851	—1,5152	—0,4390	—10,2705	3,5933	—11,38487
4,82	0,1964	—1,5103	—0,3771	—8,2851	2,9006	
4,84	0,2076	—1,5060	—0,3343	—6,9219	2,4251	
4,86	0,2188	—1,5022	—0,3028	—5,9272	2,0786	
4,88	0,2300	—1,4989	—0,2785	—5,1700	1,8154	
4,90	0,2412	—1,4963	—0,2593	—4,5743	1,6085	—5,26749

Scanned with OKEN Scanner

urmare

ν	$\alpha(\nu)$	$\beta(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$	$\operatorname{tg}\nu$
4,92	0,2524	—1,4941	—0,2435	—4,0927	1,4417	
4,94	0,2636	—1,4926	—0,2303	—3,6959	1,3045	
4,96	0,2748	—1,4916	—0,2192	—3,3629	1,1896	
4,98	0,2861	—1,4912	—0,2096	—3,0797	1,0921	
5,00	0,2975	—1,4914	—0,2011	—2,8355	1,0083	—3,38052
5,02	0,3089	—1,4922	—0,1937	—2,6231	0,9356	
5,04	0,3204	—1,4936	—0,1872	—2,4350	0,8725	
5,06	0,3320	—1,4954	—0,1811	—2,2691	0,8157	
5,08	0,3437	—1,4981	—0,1757	—2,1235	0,7658	
5,10	0,3555	—1,5014	—0,1707	—1,9912	0,7211	—2,44939
5,12	0,3674	—1,5053	—0,1662	—1,8719	0,6809	
5,14	0,3795	—1,5099	—0,1620	—1,7632	0,6446	
5,16	0,3918	—1,5152	—0,1581	—1,6644	0,6116	
5,18	0,4042	—1,5212	—0,1545	—1,5740	0,5816	
5,20	0,4169	—1,5280	—0,1512	—1,4908	0,5541	—1,88564
5,22	0,4298	—1,5355	—0,1480	—1,4141	0,5288	
5,24	0,4429	—1,5438	—0,1450	—1,3431	0,5056	
5,26	0,4562	—1,5529	—0,1422	—1,2771	0,4841	
5,28	0,4698	—1,5629	—0,1396	—1,2158	0,4642	
5,30	0,4838	—1,5738	—0,1370	—1,1585	0,4458	—1,50128
5,32	0,4981	—1,5857	—0,1346	—1,1049	0,4286	
5,34	0,5128	—1,5986	—0,1324	—1,0547	0,4126	
5,36	0,5278	—1,6124	—0,1302	—1,0074	0,3977	
5,38	0,5433	—1,6274	—0,1281	—0,9629	0,3837	
5,40	0,5592	—1,6436	—0,1261	—0,9209	0,3706	—1,21754
5,42	0,5756	—1,6610	—0,1242	—0,8812	0,3583	
5,44	0,5925	—1,6797	—0,1223	—0,8436	0,3467	
5,46	0,6100	—1,6998	—0,1205	—0,8079	0,3358	
5,48	0,6282	—1,7214	—0,1188	—0,7740	0,3255	
5,50	0,6470	—1,7446	—0,1171	—0,7417	0,3158	—0,99558
5,52	0,6666	—1,7694	—0,1155	—0,7110	0,3066	
5,54	0,6870	—1,7961	—0,1139	—0,6816	0,2979	
5,56	0,7083	—1,8248	—0,1124	—0,6535	0,2897	
5,58	0,7305	—1,8555	—0,1110	—0,6267	0,2819	
5,60	0,7538	—1,8886	—0,1096	—0,6010	0,2745	—0,81394
5,62	0,7783	—1,9242	—0,1082	—0,5763	0,2675	
5,64	0,8040	—1,9624	—0,1068	—0,5526	0,2608	
5,66	0,8311	—2,0037	—0,1055	—0,5298	0,2544	
5,68	0,8597	—2,0481	—0,1042	—0,5079	0,2484	
5,70	0,8901	—2,0961	—0,1030	—0,4868	0,2426	—0,65973
5,72	0,9224	—2,1481	—0,1018	—0,4664	0,2371	
5,74	0,9567	—2,2045	—0,1006	—0,4468	0,2319	
5,76	0,9934	—2,2657	—0,0994	—0,4278	0,2269	
5,78	1,0327	—2,3323	—0,0983	—0,4095	0,2221	
5,80	1,0756	—2,4050	—0,0972	—0,3917	0,2176	—0,52467

Scanned with OKEN Scanner

urmare

ν	$\alpha(\nu)$	$\beta(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$	$\operatorname{tg}\nu$
5,82	1,1207	—2,4845	—0,0961	—0,3745	0,2132	
5,84	1,1702	—2,5718	—0,0951	—0,3578	0,2090	
5,86	1,2240	—2,6679	—0,0941	—0,3416	0,2051	
5,88	1,2829	—2,7743	—0,0931	—0,3258	0,2012	
5,90	1,3476	—2,8924	—0,0921	—0,3105	0,1976	—0,40311
5,92	1,4190	—3,0241	—0,0911	—0,2956	0,1942	
5,94	1,4984	—3,1719	—0,0901	—0,2812	0,1908	
5,96	1,5873	—3,3387	—0,0892	—0,2670	0,1876	
5,98	1,6870	—3,5284	—0,0883	—0,2532	0,1846	
6,00	1,8015	—3,7455	—0,0874	—0,2398	0,1817	—0,29101
6,02	1,9323	—3,9966	—0,0865	—0,2267	0,1789	
6,04	2,0842	—4,2902	—0,0856	—0,2138	0,1762	
6,06	2,2628	—4,6366	—0,0847	—0,2013	0,1736	
6,08	2,4760	—5,0527	—0,0839	—0,1890	0,1712	
6,10	2,7289	—5,5609	—0,0831	—0,1769	0,1689	0,18527
6,12	3,0573	—6,1949	—0,0823	—0,1651	0,1666	
6,14	3,4686	—7,0071	—0,0815	—0,1535	0,1645	
6,16	4,0126	—8,0854	—0,0807	—0,1422	0,1625	
6,18	4,7665	—9,5830	—0,0799	—0,1310	0,1606	
6,20	5,8812	—11,8030	—0,0791	—0,1200	0,1588	0,08337
6,22	7,7007	—15,4327	—0,0783	—0,1092	0,1570	
6,24	11,2024	—22,4274	—0,0776	—0,0985	0,1552	
6,26	20,7419	—41,5016	—0,0768	—0,0880	0,1537	
6,28	149, 828	—299,6568	—0,0761	—0,0776	0,1522	
2π	∞	∞	—0,0760	—0,0760	0,1520	0,00000

Scanned with OKEN Scanner

VALORILE FUNCȚIILOR

$$\varphi_1(\nu) = \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \nu}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)}; \quad \varphi_2(\nu) = \frac{\nu(\operatorname{tg} \nu - \nu)}{8 \operatorname{tg} \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\right)} \quad \varphi_3(\nu) = \frac{\nu(\nu - \sin \nu)}{4 \sin \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\right)}$$

$$\varphi_4(\nu) = \varphi_1\left(\frac{\nu}{2}\right); \quad \eta_1(\nu) = \frac{\nu^3}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)}; \quad \eta_2(\nu) = \eta_1\left(\frac{\nu}{2}\right); \quad \eta_3(\nu) = \varphi_4(\nu)$$

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,20	0,9973	0,9986	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,40	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9840
0,60	0,9756	0,9881	1,0061	0,9941	0,8556	0,9641
0,80	0,9567	0,9787	1,0111	0,9895	0,7434	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8790
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9756	0,4198	0,8556
1,30	0,8814	0,9424	1,0296	0,9714	0,3181	0,8306
1,40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8025
1,50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9620	0,0893	0,7745
$\pi/2$	0,8225	0,9149	1,0445	0,9581	0	0,7525
1,60	0,8153	0,9116	1,0463	0,9567	—0,0380	0,7434
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9510	—0,1742	0,7102
1,80	0,7609	0,8871	1,0600	0,9449	—0,3191	0,6749
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9383	—0,4736	0,6375
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	—0,6372	0,5980
2,02	0,6891	0,8560	1,0777	0,9299	—0,6710	0,5899
2,04	0,6819	0,8530	1,0795	0,9285	—0,7053	0,5817
2,06	0,6747	0,8499	1,0813	0,9277	—0,7398	0,5734
2,08	0,6672	0,8468	1,0831	0,9255	—0,7749	0,5650
2,10	0,6597	0,8437	1,0850	0,9240	—0,8103	0,5565
2,12	0,6521	0,8405	1,0868	0,9225	—0,8465	0,5480
2,14	0,6443	0,8372	1,0887	0,9210	—0,8822	0,5394
2,16	0,6364	0,8339	1,0907	0,9195	—0,9188	0,5307
2,18	0,6284	0,8306	1,0926	0,9180	—0,9557	0,5220
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	—0,9931	0,5131
2,22	0,6119	0,8239	1,0966	0,9148	—1,0309	0,5041
2,24	0,6034	0,8204	1,0988	0,9132	—1,0691	0,4951
2,26	0,5948	0,8170	1,1009	0,9116	—1,1077	0,4860
2,28	0,5861	0,8134	1,1029	0,9100	—1,1457	0,4768
2,30	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	—1,1861	0,4675
2,32	0,5681	0,8063	1,1072	0,9066	—1,2260	0,4581
2,34	0,5589	0,8026	1,1095	0,9049	—1,2663	0,4486
2,36	0,5496	0,7989	1,1117	0,9032	—1,3069	0,4391
2,38	0,5401	0,7952	1,1140	0,9015	—1,3480	0,4295

Scanned with OKEN Scanner

urmare

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	—1,3896	0,4198
2,42	0,5205	0,7877	1,1188	0,8991	—1,4316	0,4101
2,44	0,5105	0,7838	1,1212	0,8963	—1,4743	0,4002
2,46	0,5003	0,7799	1,1236	0,8945	—1,5169	0,3902
2,48	0,4899	0,7760	1,1261	0,8927	—1,5602	0,3802
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	—1,6040	0,3701
2,52	0,4685	0,7679	1,1311	0,8890	—1,6383	0,3598
2,54	0,4576	0,7638	1,1337	0,8871	—1,7929	0,3495
2,56	0,4464	0,7596	1,1363	0,8852	—1,7381	0,3391
2,58	0,4350	0,7555	1,1390	0,8833	—1,7838	0,3286
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	—1,8299	0,3181
2,62	0,4116	0,7470	1,1445	0,8795	—1,8765	0,3075
2,64	0,3996	0,7427	1,1473	0,8776	—1,9236	0,2968
2,66	0,3873	0,7383	1,1501	0,8756	—1,9712	0,2860
2,68	0,3748	0,7339	1,1530	0,8736	—2,0193	0,2751
2,70	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	—2,0679	0,2641
2,72	0,3491	0,7249	1,1589	0,8696	—2,1170	0,2531
2,74	0,3358	0,7204	1,1619	0,8676	—2,1667	0,2420
2,76	0,3223	0,7158	1,1650	0,8655	—2,2169	0,2307
2,78	0,3085	0,7111	1,1681	0,8634	—2,2676	0,2192
2,80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	—2,3189	0,2080
2,82	0,2801	0,7016	1,1744	0,8592	—2,3707	0,1968
2,84	0,2654	0,6967	1,1777	0,8571	—2,4231	0,1850
2,86	0,2505	0,6918	1,1810	0,8550	—2,4760	0,1734
2,88	0,2352	0,6869	1,1844	0,8528	—2,5296	0,1616
2,90	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	—2,5838	0,1498
2,92	0,2036	0,6768	1,1913	0,8484	—2,6385	0,1379
2,94	0,1878	0,6717	1,1948	0,8462	—2,6939	0,1261
2,96	0,1706	0,6665	1,1984	0,8439	—2,7499	0,1138
2,98	0,1535	0,6613	1,2020	0,8416	—2,8066	0,1016
3,00	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	—2,8639	0,0893
3,02	0,1182	0,6506	1,2095	0,8370	—2,9219	0,0770
3,04	0,1000	0,6452	1,2133	0,8347	—2,9805	0,0646
3,06	0,0812	0,6398	1,2172	0,8323	—3,0400	0,0520
3,08	0,0621	0,6343	1,2212	0,8299	—3,0991	0,0394
3,10	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	—3,1609	0,0267
3,12	0,0223	0,6230	1,2292	0,8251	—3,2225	0,0139
3,14	0,0017	0,6173	1,2334	0,8227	—3,2848	0,0011
π	0	0,6168	1,2336	0,8224	—3,2898	0
3,16	—0,0195	0,6115	1,2376	0,8203	—3,3480	—0,0118
3,18	—0,0412	0,6057	1,2419	0,8178	—3,4120	—0,0249
3,20	—0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	—3,4768	—0,0380
3,22	—0,0864	0,5937	1,2507	0,8128	—3,5425	—0,0512
3,24	—0,1100	0,5876	1,2552	0,8102	—3,6092	—0,0646
3,26	—0,1342	0,5815	1,2597	0,8076	—3,6767	—0,0780
3,28	—0,1591	0,5753	1,2644	0,8050	—3,7453	—0,0915

Scanned with OKEN Scanner

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,30	—0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	—3,8147	—0,1051
3,32	—0,2111	0,5628	1,2739	0,7998	—3,8852	—0,1187
3,34	—0,2383	0,5564	1,2788	0,7972	—3,9568	—0,1324
3,36	—0,2663	0,5499	1,2838	0,7945	—4,0295	—0,1463
3,38	—0,2951	0,5433	1,2889	0,7918	—4,1032	—0,1602
3,40	—0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	—4,1781	—0,1742
3,42	—0,3555	0,5299	1,2992	0,7863	—4,2540	—0,1884
3,44	—0,3873	0,5231	1,3045	0,7835	—4,3318	—0,2026
3,46	—0,4202	0,5162	1,3099	0,7807	—4,4107	—0,2169
3,48	—0,4542	0,5092	1,3155	0,7779	—4,4910	—0,2313
3,50	—0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	—4,5727	—0,2457
3,52	—0,5259	0,4950	1,3270	0,7723	—4,6560	—0,2602
3,54	—0,5638	0,4878	1,3328	0,7695	—4,7410	—0,2748
3,56	—0,6031	0,4805	1,3387	0,7667	—4,8276	—0,2894
3,58	—0,6439	0,4731	1,3447	0,7638	—4,9160	—0,3042
3,60	—0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	—5,0062	—0,3191
3,62	—0,7303	0,4580	1,3571	0,7580	—5,0984	—0,3340
3,64	—0,7763	0,4503	1,3635	0,7550	—5,1928	—0,3491
3,66	—0,8243	0,4425	1,3700	0,7520	—5,2895	—0,3643
3,68	—0,8745	0,4345	1,3766	0,7483	—5,3886	—0,3797
3,70	—0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	—5,4903	—0,3951
3,72	—0,9819	0,4184	1,3903	0,7425	—5,5947	—0,4107
3,74	—1,0395	0,4102	1,3973	0,7393	—5,7020	—0,4263
3,76	—1,0999	0,4019	1,4044	0,7361	—5,8124	—0,4420
3,78	—1,1634	0,3935	1,4217	0,7329	—5,9262	—0,4578
3,80	—1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	—6,0436	—0,4736
3,82	—1,3009	0,3764	1,4267	0,7265	—6,1650	—0,4895
3,84	—1,3754	0,3677	1,4344	0,7232	—6,2906	—0,5056
3,86	—1,4543	0,3588	1,4423	0,7199	—6,4208	—0,5217
3,88	—1,5380	0,3498	1,4503	0,7166	—6,5561	—0,5379
3,90	—1,6468	0,3407	1,4584	0,7133	—6,6968	—0,5542
3,92	—1,7214	0,3315	1,4667	0,7099	—6,8435	—0,5706
3,94	—1,8227	0,3221	1,4752	0,7065	—6,9972	—0,5871
3,96	—1,9310	0,3126	1,4838	0,7031	—7,1582	—0,6037
3,98	—2,0473	0,3030	1,4928	0,6996	—7,3274	—0,6204
4,00	—2,1725	0,2933	1,5018	0,6961	—7,5058	—0,6372
4,02	—2,3074	0,2834	1,5110	0,6926	—7,6942	—0,6541
4,04	—2,4547	0,2734	1,5204	0,6891	—7,8952	—0,6710
4,06	—2,6142	0,2632	1,5301	0,6855	—8,1087	—0,6881
4,08	—2,7888	0,2529	1,5400	0,6819	—8,3376	—0,7053
4,10	—2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	—8,5839	—0,7225
4,12	—3,1915	0,2318	1,5604	0,6747	—8,8496	—0,7398
4,14	—3,4262	0,2210	1,5709	0,6710	—9,1394	—0,7573
4,16	—3,6877	0,2101	1,5816	0,6673	—9,4562	—0,7749
4,18	—3,9824	0,1990	1,5925	0,6635	—9,8065	—0,7925

Scanned with OKEN Scanner

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,20	—4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	—10,196	—0,8103
4,22	—4,6970	0,1762	1,6150	0,6559	—10,633	—0,8281
4,24	—5,1369	0,1646	1,6267	0,6521	—11,129	—0,8460
4,26	—5,6516	0,1528	1,6387	0,6482	—11,701	—0,8641
4,28	—6,2607	0,1409	1,6510	0,6443	—12,367	—0,8822
4,30	—6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	—13,158	—0,9004
4,32	—7,8956	0,1165	1,6767	0,6364	—14,116	—0,9188
4,34	—9,0306	0,1040	1,6899	0,6324	—15,309	—0,9372
4,36	—10,503	0,0912	1,7033	0,6284	—16,840	—0,9557
4,38	—12,523	0,0781	1,7170	0,6243	—18,918	—0,9744
4,40	—15,330	0,0648	1,7310	0,6202	—21,783	—0,9931
4,42	—19,703	0,0513	1,7452	0,6161	—26,215	—1,0119
4,44	—27,349	0,0376	1,7602	0,6119	—33,920	—1,0309
4,46	—44,148	0,0237	1,7754	0,6077	—50,779	—1,0499
4,48	—111,57	0,0096	1,7910	0,6034	—118,26	—1,0691
4,50	+227,80	—0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	—1,0884
4,52		—0,0194	1,8234	0,5948		—1,1077
4,54		—0,0343	1,8402	0,5905		—1,1271
4,56		—0,0495	1,8575	0,5861		—1,1457
4,58		—0,0650	1,8752	0,5817		—1,1662
4,60		—0,0807	1,8933	0,5772		—1,1861
4,62		—0,0969	1,9119	0,5727		—1,2060
4,64		—0,1133	1,9310	0,5681		—1,2250
4,66		—0,1301	1,9507	0,5635		—1,2461
4,68		—0,1472	1,9710	0,5589		—1,2663
4,70		—0,1646	1,9919	0,5543		—1,2865
$3/2\pi$		—0,1755	2,0052	0,5514		—1,2992
4,72		—0,1824	2,0134	0,5496		—1,3069
4,74		—0,2005	2,0355	0,5449		—1,3274
4,76		—0,2190	2,0582	0,5402		—1,3480
4,78		—0,2379	2,0816	0,5354		—1,3586
4,80		—0,2572	2,1056	0,5305		—1,3896
4,82		—0,2770	2,1304	0,5255		—1,4105
4,84		—0,2973	2,1506	0,5205		—1,4316
4,86		—0,3181	2,1824	0,5155		—1,4528
4,88		—0,3394	2,2096	0,5105		—1,4743
4,90		—0,3612	2,2377	0,5054		—1,4954
4,92		—0,3834	2,2667	0,5003		—1,5169
4,94		—0,4061	2,2966	0,4951		—1,5385
4,96		—0,4293	2,3275	0,4899		—1,5602
4,98		—0,4530	2,3594	0,4846		—1,5821
5,00		—0,4772	2,3924	0,4793		—1,6040
5,02		—0,5022	2,4266	0,4739		—1,6261
5,04		—0,5280	2,4620	0,4685		—1,6483
5,06		—0,5545	2,4986	0,4630		—1,6706
5,08		—0,5818	2,5365	0,4576		—1,6929

Scanned with OKEN Scanner

urmare

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
5,10		—0,6099	2,5757	0,4520		—1,7155
5,12		—0,6388	2,6164	0,4464		—1,7381
5,14		—0,6685	2,6587	0,4407		—1,7609
5,16		—0,6999	2,7027	0,4350		—1,7838
5,18		—0,7306	2,7485	0,4292		—1,8078
5,20		—0,7630	2,7961	0,4234		—1,8299
5,22		—0,7964	2,8454	0,4175		—1,8532
5,24		—0,8310	2,8968	0,4116		—1,8765
5,26		—0,8668	2,9504	0,4056		—1,9000
5,28		—0,9039	3,0064	0,3996		—1,9236
5,30		—0,9423	3,0648	0,3931		—1,9477
5,32		—0,9821	3,1257	0,3873		—1,9712
5,34		—1,0233	3,1893	0,3811		—1,9952
5,36		—1,0660	3,2559	0,3748		—2,0193
5,38		—1,1103	3,3267	0,3685		—2,0435
5,40		—1,1563	3,3989	0,3621		—2,0679
5,42		—1,2043	3,4757	0,3556		—2,0924
5,44		—1,2544	3,5563	0,3491		—2,1170
5,46		—1,3067	3,6409	0,3425		—2,1418
5,48		—1,3612	3,7298	0,3358		—2,1667
5,50		—1,4181	3,8234	0,3291		—2,1917
5,52		—1,4777	3,9222	0,3223		—2,2169
5,54		—1,5402	4,0267	0,3154		—2,2422
5,56		—1,6059	4,1374	0,3085		—2,2676
5,58		—1,6751	4,2549	0,3015		—2,2932
5,60		—1,7481	4,3794	0,2944		—2,3189
5,62		—1,8252	4,5118	0,2873		—2,3447
5,64		—1,9065	4,6526	0,2801		—2,3707
5,66		—1,9920	4,8026	0,2727		—2,3969
5,68		—2,0833	4,9629	0,2654		—2,4231
5,70		—2,1804	5,1346	0,2580		—2,4495
5,72		—2,2833	5,3190	0,2505		—2,4760
5,74		—2,3944	5,5173	0,2429		—2,5027
5,76		—2,5130	5,7314	0,2352		—2,5296
5,78		—2,6406	5,9628	0,2274		—2,5466
5,80		—2,7777	6,2140	0,2195		—2,5838
5,82		—2,9262	6,4873	0,2116		—2,6111
5,84		—3,0876	6,7859	0,2036		—2,6385
5,86		—3,2634	7,1132	0,1955		—2,6661
5,88		—3,4562	7,4738	0,1873		—2,6939
5,90		—3,6678	7,8726	0,1790		—2,7218
5,92		—3,9018	8,3163	0,1706		—2,7499
5,94		—4,1603	8,8122	0,1621		—2,7782
5,96		—4,4547	9,3706	0,1535		—2,8066
5,98		—4,7816	10,004	0,1448		—2,8352

Scanned with OKEN Scanner

urmare

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
6,00		—5,1589	10,727	0,1361		—2,8639
6,02		—5,5845	11,561	0,1272		—2,8928
6,04		—6,0653	12,534	0,1182		—2,9219
6,06		—6,6753	13,683	0,1091		—2,9512
6,08		—7,3699	15,060	0,0999		—2,9805
6,10		—8,2355	16,739	0,0906		—3,0102
6,12		—9,2939	18,832	0,0812		—3,0400
6,14		—10,646	21,511	0,0717		—3,0699
6,16		—12,440	25,065	0,0621		—3,0991
6,18		—14,921	29,999	0,0523		—3,1304
6,20		—18,594	37,308	0,0424		—3,1609
6,22		—24,575	49,255	0,0324		—3,1916
6,24		—36,100	72,272	0,0223		—3,2225
6,26		—67,436	135,03	0,0121		—3,2535
6,28		—492,67	984,32	0,0017		—3,2848
2π		$-\infty$	$+\infty$	0		—3,2898

VALORILE FUNCȚIILOR

$$A_{kx} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} kx + \cos kx); \qquad C_{kx} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} kx - \cos kx);$$

$$B_{kx} = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} kx + \sin kx); \qquad D_{kx} = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} kx - \sin kx),$$

kx	A_{kx}	B_{kx}	C_{kx}	D_{kx}
0,00	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,01	1,00000	0,01000	0,00005	0,00000
0,02	1,00000	0,02000	0,00020	0,00000
0,03	1,00000	0,03000	0,00045	0,00000
0,04	1,00000	0,04000	0,00080.	0,00001
0,05	1,00000	0,05000	0,00125	0,00002
0,06	1,00000	0,06000	0,00180	0,00004
0,07	1,00000	0,07000	0,00245	0,00006
0,08	1,00000	0,08000	0,00320	0,00009
0,09	1,00000	0,09000	0,00405	0,00012
0,10	1,00000	0,10000	0,00500	0,00017
0,20	1,00007	0,20000	0,02000	0,00133
0,30	1,00034	0,30002	0,04500	0,00450
0,40	1,00106	0,40008	0,07999	0,01062
0,50	1,00261	0,50026	0,12502	0,02084
0,60	1,00539	0,60064	0,18006	0,03606
0,70	1,01001	0,70190	0,24516	0,05718
0,80	1,01702	0,80273	0,32036	0,08537
0,90	1,02735	0,90492	0,40574	0,12159
1,0	1,04169	1,00833	0,50139	0,16686
1,1	1,06106	1,11343	0,60746	0,22222
1,2	1,08651	1,22075	0,72415	0,28871
1,3	1,11920	1,33097	0,85170	0,36691
1,4	1,16043	1,44487	0,99046	0,45942
1,5	1,21157	1,56338	1,14083	0,56589
$^1/_2\pi$	1,25409	1,65015	1,25409	0,65015
1,6	1,27413	1,68757	1,30333	0,63800
1,7	1,39974	1,81864	1,47832	0,82698
1,8	1,44013	1,95801	1,66823	0,98416
1,9	1,54722	2,10723	1,87551	1,16093
2,0	1,67277	2,26808	2,08917	1,35828
2,1	1,82973	2,44253	2,32458	1,57937
2,2	1,98970	2,63280	2,57820	1,82430
2,3	2,18547	2,84133	2,85175	2,09562
2,4	2,40978	3,07085	3,14717	2,39537

Scanned with OKEN Scanner

urmare

kx	A_{kx}	B_{kx}	C_{kx}	D_{kx}
2,5	2,66557	3,32433	3,46671	2,72586
2,6	2,95606	3,60511	3,81295	3,08961
2,7	3,08470	3,91682	4,18872	3,48944
2,8	3,65520	4,26346	4,59747	3,92846
2,9	4,07181	4,64940	5,04277	4,41016
3,0	4,53883	5,07949	5,52882	4,93837
3,1	5,06118	5,55901	6,06032	5,51743
π	5,29597	5,77437	6,29597	5,77437
3,2	5,64418	6,09375	6,64247	6,15212
3,3	6,29364	6,69006	7,28112	6,84781
3,4	7,01592	7,35491	7,98277	7,61045
3,5	7,81818	8,09592	8,75464	8,44760
3,6	8,70801	8,92147	9,60477	9,36399
3,7	9,69345	9,84072	10,54205	10,37056
3,8	10,78540	10,86377	11,57637	11,47563
3,9	11,99271	12,00167	12,71864	12,68943
4,0	13,32739	13,26656	13,98093	14,02336
4,1	14,80180	14,67179	15,37662	15,49007
4,2	16,43020	16,23204	16,92046	17,10362
4,3	18,27794	17,96347	18,62874	18,87964
4,4	20,21212	19,88385	20,51945	20,83545
4,5	22,40166	22,01274	22,61246	22,99027
4,6	24,81751	24,37172	24,92966	25,36541
4,7	26,48287	26,98456	27,49526	27,98448
$3/2\pi$	27,83169	27,32720	27,83169	28,32720
4,8	30,42341	29,87746	30,33591	30,87362
4,9	33,66756	33,07936	33,48105	34,06181
5,0	37,24680	36,62214	36,96314	37,58106
5,1	41,19599	40,54105	40,81801	41,46686
5,2	45,55370	44,87495	45,08518	45,75840
5,3	50,36263	49,66682	49,80826	50,49909
5,4	55,67008	54,96409	55,03539	55,73685
5,5	61,52834	60,81919	60,81967	61,52473
5,6	67,99531	67,29004	66,21974	67,92131
5,7	75,13504	74,44067	74,30033	74,99136
5,8	83,01840	82,34183	82,13288	82,80633
5,9	91,72379	91,07172	90,79631	91,44562
6,0	101,33790	100,71687	100,37773	100,99629
6,1	111,95664	111,37280	110,97337	111,55491
6,2	123,68604	123,19521	122,68950	123,22830
2π	134,37338	133,87245	133,37338	133,87245
6,3	136,64336	136,15092	135,64350	136,13411
6,4	150,96826	150,46912	149,97508	150,35257

Scanned with OKEN Scanner

urmare

kx	A_{kx}	B_{kx}	C_{kx}	D_{kx}
6,5	166,77508	166,39259	165,79749	166,17747
6,6	184,24925	183,92922	183,29902	183,61768
6,7	203,55895	203,30357	202,64457	202,89872
6,8	224,89590	224,70860	224,02740	224,21449
6,9	248,47679	248,35764	247,66106	247,77920
7,0	274,53547	274,48655	273,78157	273,82956
7,1	303,33425	303,28381	302,64970	302,62707
7,2	335,16205	335,25434	334,55370	334,46067
7,3	370,33819	370,50003	369,81211	369,64954
7,4	409,21553	409,44531	408,77698	408,54660
7,5	452,18406	452,92446	451,73742	451,54146
7,6	499,67473	500,03281	499,42347	499,06489
7,7	552,16384	552,58097	552,01042	551,58780
7,8	610,17757	610,64966	610,12361	609,65112
$5/2\pi$	643,99272	644,49252	643,99272	643,49252
7,9	674,29767	674,81986	674,34367	673,82102
8,0	745,16683	745,73409	745,31233	744,74473
8,1	823,49532	823,95189	823,73886	823,28200
8,2	910,06807	910,70787	910,40722	909,76714
8,3	1005,75247	1006,41912	1006,18385	1005,51695
8,4	1111,50710	1112,19393	1112,02639	1111,33933
8,5	1228,39125	1229,09140	1228,99326	1228,29291
8,6	1357,57558	1358,28205	1358,25430	1357,54765
8,7	1500,35377	1501,05950	1501,10242	1500,39658
8,8	1658,15549	1658,85342	1658,96658	1658,26850
8,9	1832,56070	1833,42607	1833,42614	1832,74284
9,0	2025,31545	2025,97701	2026,22658	2025,56489
9,1	2238,34934	2238,98270	2239,29706	2238,66360
9,2	2473,79487	2474,39373	2474,76971	2474,17079
9,3	2734,00871	2734,56701	2735,00094	2734,44255
9,4	3021,59536	3022,10755	3022,59505	3022,08297
3π	3097,41192	3097,91193	3098,41197	3097,91193
9,5	3339,43314	3339,89411	3340,43031	3359,96926
9,6	3690,70306	3691,11321	3691,68775	3691,27754
9,7	4078,92063	4079,26590	4079,88299	4079,53766
9,8	4508,47103	4508,25298	4508,90146	4508,61946
9,9	4982,14802	4982,35202	4983,03721	4982,32136
10,0	5506,19696	5506,34442	5507,03599	5506,88844

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Pag.

Prefață 5

I. Stabilitatea construcțiilor

Introducere 7

Cap. 1. **Forțele critice și metodele pentru determinarea lor**

§ 1. Pierderea stabilității, forța critică și parametrul critică 9
§ 2. Metode pentru determinarea forțelor critice 11

Cap. 2. **Stabilitatea barelor drepte**

§ 3. Cele cinci cazuri de fixare a capetelor unei bare drepte 18
§ 4. Stabilitatea barelor cu extremitățile încastrate elastic. 19
§ 5. Acțiunea simultană a mai multor forțe 23
§ 6. Stabilitatea unei bare verticale sub acțiunea greutății proprii . . . 28
§ 7. Stabilitatea barelor cu secțiune variabilă 33
§ 8. Influența slăbirilor locale ale secțiunii asupra valorii forței critice . 41
§ 9. Influența forței tăietoare asupra valorii forței critice la barele cu secțiune plină 43
§ 10. Stabilitatea barelor cu zăbrelute 45
Probleme și exerciții 49

Cap. 3. **Stabilitatea arcelor**

§ 11. Generalități 52
§ 12. Ecuația diferențială a echilibrului pentru o bară curbă de formă circulară 52
§ 13. Stabilitatea unui inel circular supus la o presiune hidrostatică . . . 54
§ 14. Stabilitatea arcelor circulare sub acțiunea unei presiuni hidrostatice . 56
§ 15. Stabilitatea unui arc circular cu extremitățile incastrate elastic, supus la acțiunea unei presiuni hidrostatice 63
§ 16. Stabilitatea arcelor parabolice 65
§ 17. Stabilitatea formei simetrice de deformație a arcelor parabolice . . . 72
Probleme și exerciții 77

Cap. 4. **Stabilitatea cadrelor**

§ 18. Ipoteze de calcul 79

A. Metoda forțelor

§ 19. Determinarea deplasărilor la barele comprimate 80
§ 20. Regulile pentru calculul integralelor pentru cazurile elementare . . 82
§ 21. Alegerea sistemului de calcul a necunoscutelor suplimentare 88
§ 22. Ecuațiile de condiție și ecuația de stabilitate 90
§ 23. Calculul coeficienților ecuațiilor de condiție (canonice) 91

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

§ 24. Exemple de aplicare a metodei forțelor 93
§ 25. Folosirea simetriei 96

B. Metoda deplasărilor

§ 26. Ecuația de stabilitate 101
§ 27. Calculul reacțiunilor 102
§ 28. Exemple de aplicare a metodei deplasărilor 109
§ 29. Folosirea simetriei 115
Probleme și exerciții 118

Cap. 5. **Stabilitatea barelor pe reazime elastice**

§ 30. Bară cu un singur reazim elastic 120
§ 31. Stabilitatea diagonalelor comprimate într'o grindă cu zăbrele sistem multiplu 123
§ 32. Stabilitatea unei bare în mediu elastic 127
§ 33. Stabilitatea tălpii superioare a unui pod fără contravântuiri superioare 129

Cap. 6. **Stabilitatea formei plane de încovoiere**

§ 34. Ipoteze de calcul 132
§ 35. Stabilitatea inimii unei grinzi la încovoiere pură 132
§ 36. Stabilitatea inimii la compresiune excentrică 134
§ 37. Stabilitatea unei grinzi cu secțiune dreptunghiulară, sub acțiunea sarcinilor transversale 136
§ 38. Stabilitatea transversală la încovoiere a grinzilor cu profil I. 138

II. Dinamica construcțiilor

Introducere 143

Cap. 1. **Vibrațiile sistemelor cu un singur grad de libertate**

§ 1. Vibrații libere 146
Probleme și exerciții 152
§ 2. Oscilații libere amortizate 154
§ 3. Oscilații forțate într'un mediu fără rezistență 158
§ 4. Oscilații forțate amortizate 161
§ 5. Pulsații 165
§ 6. Oscilații provocate de o sarcină aplicată brusc 169
Probleme și exerciții 171

Cap. 2. **Oscilațiile proprii ale unui sistem cu mai multe grade de libertate**

§ 7. Gradele de libertate ale sistemelor elastice 173

A. Metodele exacte pentru calculul frecvențelor

§ 8. Ecuațiile principale ale oscilațiilor libere ale sistemelor 175
§ 9. Folosirea simetriei 183
§ 10. Oscilațiile proprii ale unui sistem cu un număr infinit de grade de libertate 185
§ 11. Oscilațiile proprii ale grinzilor continue; ecuația celor trei momente . 191
Probleme și exerciții 195

B. Metode aproximative pentru calculul frecvențelor

§ 12. Problemele care stau în fața metodelor aproximative 197
§ 13. Metoda energetică 197
§ 14. Metoda maselor reduse 201

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

§ 15. Metoda înlocuirii masei repartizate prin mase concentrate 204
§ 16. Metoda aproximaţiilor succesive 209

C. Oscilaţiile proprii ale grinzilor cu zăbrele

§ 17. Ecuaţiile fundamentale pentru calculul frecvenţelor 214
§ 18. Metode aproximative pentru determinarea frecvenţelor 216

Cap. 3. **Oscilaţiile forţate ale unui sistem cu mai multe grade de libertate**

§ 19. Probleme care se ivesc la calculul sistemelor elastice sub acţiunea sarcinilor dinamice 227
§ 20. Expresia eforturilor interioare şi a deplasărilor într'un sistem elastic supus la acţiunea sarcinilor dinamice 228
§ 21. Ecuaţiile de condiţie (canonice) pentru calculul forţelor de inerţie . . 229
§ 22. Posibilităţile de producere a mai multor rezonanţe 231

A. Calculul dinamic al grinzilor şi cadrelor

§ 23. Construirea diagramelor momentelor dinamice fără a ţine seama de greutatea proprie 232
§ 24. Folosirea simetriei 242
§ 25. Calculul construcţiilor la greutatea proprie 246
§ 26. Oscilaţiile forţate ale unui sistem cu mase distribuite continuu . . . 250
§ 27. Calculul dinamic al cadrelor cu masa distribuită continuu 259

B. Calculul dinamic al arcelor

§ 28. Particularităţile calculului arcelor 270
§ 29. Exemple de calcul al arcelor la sarcini oscilatorii 276
§ 30. Calculul podurilor în arc la greutatea platelajului 280

C. Calculul dinamic al grinzilor cu zăbrele

§ 31. Eforturile în elementele grinzilor cu zăbrele la încărcări oscilatorii . 284

ANEXE

. 296
Tabloul 1 302
Tabloul 2 308
Tabloul 3 . . . . .

LUCRĂRI APĂRUTE

1. *N. A. Sohacevschi* . Organizarea exploatării locomotivelor
2. *P. N. Axenov* . . . Turnătoriile
3. *P. V. Bartenev* . . . Staţii şi noduri de cale ferată
4. *A. S. Ciudov* . . . Calculul planificat al selfcostului transporturilor feroviare
5. *D. D. Biziukin* . . Construcţia căilor ferate. vol. I şi II
6. *V. I. Golubev* . . . Confecţionarea şi recondiţionarea pieselor de vagoane, prin sudură
7. *N. Perciun* . . . . Linii aeriene de telecomunicaţii, ediţia I şi II-a
8. *D. P. Zagleadimov* . Organizarea circulaţiei în transportul feroviar
9. *V. Selunschi şi S. Eigeles* . . . . Unelte pneumatice, ediţia I şi II
10. *V. I. Turovţev şi V. I. Golubev* . . . Metode stahanoviste de revizie a vagoanelor
11. *N K P S* . . . . Manual pentru întreţinerea instalaţiilor de apă ale căilor ferate
12. *N. G. Vinnicenko* . Finanţarea căilor ferate
13. *G. M. Şahuianţ* . . Terasamente de cale ferată
14. *S. A. Beliunov şi alţii* Planificarea în transportul feroviar
15. *T. N. Hohlov* . . . Ridicarea fără foc a presiunii la locomotive
16. *G. K. Evgrafov* . . Poduri de cale ferată, vol. I, II, III şi IV
17. *N. Z. Crivorucico* . Organizarea exploatării vagoanelor
18. *G. P. Vasiliev* . . . Locomotiva
19. *A. V. Marcov şi I. N. Pavlov* . . . Metode de reglare a parcului de vagoane goale
20. *M. Mariş* . . . . . Descrierea instalaţiilor de semnalizare, centralizare şi blocare întrebuinţate la CFR, ed. I şi a II-a
21. *I. Moldovanu* . . . Apărări de maluri şi corectări de râuri
22. *K. Tihonov* . . . . Compunerea şi descompunerea trenurilor pe timp de iarnă
23. *B. N. Vedenisov* . . Tratat de construcţii de căi ferate, vol. I şi II
24. *Gh. Ionescu* . . . Construcţia şi întreţinerea vagoanelor de cale ferată, vol. II şi III
25. *G. P. Grinevici* . . Organizarea manipulării mărfurilor în transportul feroviar
26. *N. N. Zalit şi V. V. Vulf* . . . . Călăuza pentru repararea locomotivelor
27. *M. I. Dandurov* . . Tunele pe căi de comunicaţie
28. *N K P S* . . . . . Manual pentru repararea pe loc a vagoanelor
29. *P. S. Durnovo* . . . Organizarea reparaţiei şi întreţinerii căii, vol. I şi II
30. — Cartea ceferistului nr. 1 (Probleme de mişcare la căile ferate)
31. *B. L. Karvaţchi* . . Teoria generală a frânelor automate
32. *E. Popovici* . . . . Planificarea reparaţiilor materialului rulant CFR

Scanned with OKEN Scanner

33. *S. P. Sâromeatnicov, I. I. Nicolaev* și *V. V. Deev* . . . . Modernizarea complexă și metodele moderne de calcul al locomotivelor

34. *L. V. Odințov* . . . Probleme referitoare la teoria lucrului de manevră

35. *A. P. Miheev* . . . Principiile exploatării locomotivelor

36. *G. P. Grinevici* . . Mecanizarea încărcărilor și descărcărilor în masă a mărfurilor

37. *N K P S* . . . . Călăuza pentru ungătorul de vagoane în stație

38. — Cartea ceferistului nr. 2 (Probleme de tracțiune la căile ferate)

39. *I. Morcinschi* . . . Cable de telecomunicații

40. *V. E. Umblia* . . . Bazele de organizare, normare și planificare a muncii în transportul feroviar

41. *N. O. Roghinschi* . Semnalizarea, centralizarea și bloc de linie

42. — Cartea ceferistului nr. 3 (Probleme de întreținerea căii)

43. *V. I. Golubev* și *V. I. Turovțev* . . . Revizia, reparația fără deslegare și întreținerea luninistă a vagoanelor

44. *A. I. Otreșco* . . . Elemente de construcție vol. I.

45. *M. Mariș* . . . . Instalații de centralizare electrodinamică

46. — Regulatoare de circulație întrebuințate la Căile Ferate Române

47. *V. V. Povorojenco* . Transportul mărfurilor pe căile ferate

48. *L. I. Daciuc* . . . . Elemente de bază ale căilor ferate vol. I și II

49. *I. G. Socolov* . . . Forjarea și matrițarea pieselor de material rulant

50. *I. P. Procofiev* . . Statica construcțiilor, vol. I și II

51. *V. T. Osipov* . . . Organizarea marșrutelor la locurile de încărcare

52. *G. S. Topornin* . . Tehnologia metalelor și materialelor

53. *G. V. Liders* . . . Calea ferată

54. — Cartea ceferistul nr. 4 (Probleme de material rulant)

55. *O. N. Isachian* . . Incercarea cărbunilor la locomotive

56. — Electrificarea căilor ferate

57. *A. Avgustânina* și *V. Vârleman* . . . Cartea ceferistului nr. 5 (Transporturile în Marea Uniune Sovietică)

58. *G. G. Mihăescu* . . Aparate speciale pe locomotive

59. *A. M. Babicicev* și *V. T. Egorenco* . . Tracțiunea trenurilor

60. *D. D. Biziuchin* și alți Executarea construcțiilor în transportul feroviar, vol. I. și II.

61. — Cartea ceferistului Nr. 6. (Probleme de telecomunicații la căile ferate)

62. — Cartea ceferistului Nr. 7 (Mișcarea cincisutistă în RPR)

63. *I. V. Cocetov* . . . Statistica feroviară

64. *N K P S* . . . . . Călăuza maistrului pentru repararea locomotivilor în depou

65. *S. P. Sâromeatnicov* Procesul termic al locomotivei cu abur.

66. — Desvoltarea căilor ferate în Planul Cincinal

67. *N. M. Voronov* și *A. L. Turucovschi* . Fochistul de locomotivă

68. *I. F. Schiba* . . . Reparația vagoanelor prin metoda în lanț

69. *G. S. Perederii* . . Proiectarea podurilor demontabile de beton armat. Sudura podului sublocotenent Schmidt

Scanned with OKEN Scanner